Leçon 06 – Correction des exercices

Exercice 1. Soit $f(x) = \ln(2x + 3)$ pour $x \geq -1$.

1) Donner une majoration de $f'(x)$ et en déduire une majoration dre $\ln(2x + 3)$ par un polynôme de degré 1 sur $[-1 ; +\infty[$.

2) Donner alors une majoration de ln3.

Solution

1) f et définie et dérivable sur $[-1 ; +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{2}{2x+3}$.

Sur $[-1 ; +\infty[$, $2x + 3 \geq 1$, $0 \leq \dfrac{1}{2x+3} \leq 1$ et $0 \leq f'(x) \leq 2$.

D'après la première conséquence du cours,

Pour tout $x \in [-1 ; +\infty[$ $0 \leq f(x) - f(-1) \leq 2(x + 1)$ et puisque $f(-1) = 0$

$$0 \leq f(x) \leq 2x + 2.$$

2) Pour $x = 0$, la dernière inégalité donne : $\ln 3 \leq 2$.

Exercice 2. Soit $f(x) = \sqrt{3x+4}$ pour $x \geq 0$.

1) Montrer que pour tout x et y positifs :

$|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{3}{4} |x - y|$

2)* Montrer que pour tout $x > 0$,

$$|f(x) - 4| \leq \frac{3}{4} |x - 4|.$$

Solution

1) f est définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}}$.

Si $x \in [0 ; +\infty[$, $3x + 4 \geq 4$, $\sqrt{3x+4} \geq 2$, $\dfrac{1}{\sqrt{3x+4}} \leq \dfrac{1}{2}$ et $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{3}{4}$.

D'après la deuxième conséquence du cours, on en déduit que pour tous x et y strictement positifs, $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{3}{4} |x - y|$. On remarque que l'inégalité reste vraie si x ou y ou les deux sont nuls.

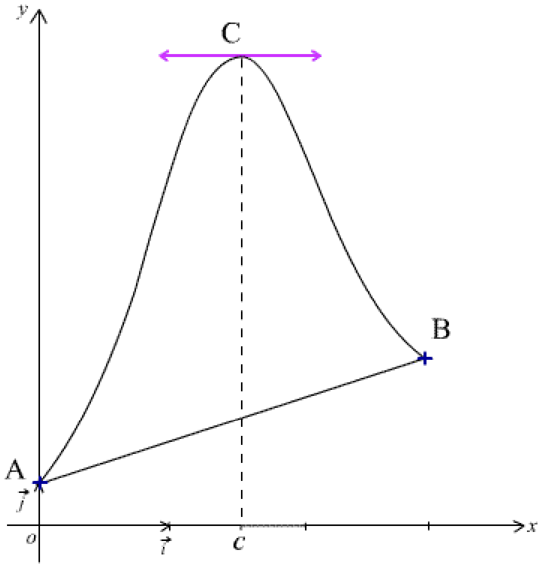
2) En remarquant que $f(4) = 4$ et en utilisant la dernière inégalité à $x = 4$, on obtient

$$|f(x) - 4| \leq \frac{3}{4} |x - 4|.$$

Exercice 3. Soit $f(x) = \exp(-x^2 + 3x) + x$ sur $[0\ ;\ 3]$. Montrer que le théorème des accroissements finis s'applique et déterminer c graphiquement puis par le calcul.

Solution

f est définie, continue et dérivable sur $[0\ ;\ 3]$ et $f'(x) = (-2x + 3)\exp(-x^2 + 3x) + 1$. En appliquant le théorème des accroissement finis on obtient :
Graphiquement : Il existe un point $C(c\ ;\ f(c))$ de $C(f)$ situé entre $A\ (0\ ;\ 1)$ et $B(3\ ;\ 4)$, où la tangente à $C(f)$ est parallèle à (AB).



Graphiquement on lit $c \approx 1.5$

Par le calcul : $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. Or $f(0) = 1$ et $f(3) = 4$. c vérifie donc $(-2c + 3)\exp(-c^2 + 3c) + 1 = 1$, soit $(-2c + 3)\exp(-c^2 + 3c) = 0$ et $(-2c + 3) = 0$ puisqu'une exponentielle est non nulle, donc $c = \dfrac{3}{2}$, ce qui confirme la lecture sur le dessin.

Exercice 4.* Soient $g : x \to \dfrac{1}{x^2}\exp(\dfrac{1}{x})$ et $f : x \to \dfrac{1}{2}\exp(\dfrac{1}{x}) + \dfrac{1}{2}x$.

1) Montrer que g est une bijection de $[1\ ;\ +\infty[$ dans un intervalle I que l'on déterminera.

2) Montrer que pour tous x et y de $[1\ ;\ +\infty[$:

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{e - 1}{2}\ |x - y|.$$

Solution

1) Si $g(x) = \dfrac{1}{x^2}\ e^{1/x}$, g est définie et dérivable sur $[1\ ;+\infty[$ et $g'(x) = -\dfrac{2}{x^3}\ e^{1/x} - \dfrac{1}{x^4}\ e^{1/x}$. Sur $[1\ ;+\infty[$, $g'(x) < 0$ et g est une bijection décroissante de $[1\ ;+\infty[$ dans $I =]0\ ;\ e\ ]$ (en effet $f(1) = e$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1/x} = 1$) .

2) f est définie et dérivable sur $[1\ ;+\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{2x^2}\ e^{1/x} + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{3}g(x) + \dfrac{1}{2}$.

Or sur $[1\ ;+\infty[$ $0 \leq g(x) \leq e$, donc $-\frac{e}{2} \leq -\frac{1}{2}g(x) \leq 0$ et $\frac{1-e}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

Or $\frac{1-e}{2} \approx -0.86$, donc $|f(x)| \leq \frac{e-1}{2}$ et en appliquant la deuxième conséquence du théorème des accroissements finis,

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{e-1}{2}\ |x - y|.$$

Exercice 5. Déterminer les D.L. au voisinage de 0 et à l'ordre 4 des fonctions suivantes :

1) $f : x \to \sqrt{1 - x^2}$ 2) $f : x \to \ln(\frac{1}{2} + x)$ 3) $f : x \to \exp(x^2 + x + 1)$

4) $f : x \to 2^{x+1}$

Solution

1) Posons $u = -x^2$. Si x est voisin de 0 u aussi et on a d'après le cours

$(1 + u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\ u - \frac{1}{8}u^2 + u^2\ \varepsilon(u)$ avec $\lim\limits_{u\to 0}\varepsilon(u) = 0$. En remplaçant u par $-x^2$, on obtient :

$\sqrt{1 - x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + x^4\ \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

2) $\ln(\frac{1}{2} + x) = \ln(\frac{1}{2}(1 + 2x)) = \ln\frac{1}{2} + \ln(1 + 2x)$. Or $u = 2x$ est voisin de 0 puisque x l'est et en remplaçant x par u dans le D.L. de l'encadré du cours :

ln(1 + u) =. Et en remplaçant u par 2x :

$\ln(1 + 2x) = 2x - 2x2 + \frac{8}{3}x3 - 4x^4 + x^4\ \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. Et

$\ln(\frac{1}{2} + x) = -\ln 2 + 2x - 2x2 + \frac{8}{3}x3 - 4x^4 + x^4\ \varepsilon(x)$.

3) $\exp(x^2 + x + 1) = e\ \exp(x^2 + x)$. Et si on pose $u = x^2 + x$, u est voisin de 0 puisque x l'est et en remplaçant x par u dans le D.L. de l'encadré du cours :

$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + u^4\ \varepsilon(u)$ avec $\lim\limits_{u\to 0}\varepsilon(u) = 0$. Et en remplaçant u par $x^2 + x$

$\exp(x^2 + x) = 1 + (x^2 + x) + \frac{(x^2 + x)^2}{2} + \frac{(x^2 + x)^3}{6} + \frac{(x^2 + x)^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

En ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 4 dans la partie régulière, les autres rentrant dans le reste :

$\exp(x^2 + x) = 1 + x + \frac{3x^2}{2} + \frac{7x^3}{6} + \frac{25x^4}{24} + x^4\ \varepsilon(x)$ et

$\exp(x^2 + x + 1) = e(1 + x + \frac{3x^2}{2} + \frac{7x^3}{6} + \frac{25x^4}{24}) + x^4\ \varepsilon(x)$.

4) $2^{x+1} = 2\times 2^x = 2e^{x\ln 2}$. Posons $u = x\ln 2$, u est voisin de 0 puisque x l'est et en remplaçant x par u dans le D.L. de l'encadré du cours :

$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + u^4\ \varepsilon(u)$ avec $\lim\limits_{u\to 0}\varepsilon(u) = 0$. Et en remplaçant u par xln2

$2^x = e^{x\ln 2} = 1 + x\ln 2 + \frac{(x\ln 2)^2}{2} + \frac{(x\ln 2)^3}{6} + \frac{(x\ln 2)^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, et

$2^{x+1} = 2\times 2^x = 2 + (2\ln 2)x + (\ln 2)^2x^2 + \frac{(\ln 2)^3}{3}x^3 + \frac{(\ln 2)^4}{12}x^4 + x^4\varepsilon(x)$.

Exercice 6. Donner un D.L. à l'ordre 2 et au voisinage de 0 de $x \to \ln(1 + e^x)$.

Solution

Pour x voisin de 0, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\,\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

$\ln(1 + e^x) = \ln(2 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\,\varepsilon(x))$. Posons $u = x + \frac{x^2}{2} + x^2\,\varepsilon(x)$, si x est voisin de 0, u aussi et $\ln(2 + u) = \ln(2(1 + \frac{u}{2})) = \ln 2 + \ln(1 + \frac{u}{2})$ et puisque $\frac{u}{2}$ est voisin de 0, on peut remplacer x par $\frac{u}{2}$ dans le D.L. du cours et

$\ln(1 + \frac{u}{2}) = \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + u^2\varepsilon(u)$ avec $\lim_{u\to 0}\varepsilon(u) = 0$. Et en remplaçant u par $= x + \frac{x^2}{2} + x^2\,\varepsilon(x)$, on obtient :

$$\ln(1 + e^x) = \ln(2 + u) = \ln 2 + \frac{(x + \frac{x^2}{2} + x^2\,\varepsilon(x))}{2} - \frac{(x + \frac{x^2}{2} + x^2\,\varepsilon(x))^2}{8} + x^2\varepsilon(x) \text{ avec}$$

$\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. On ne garde pour la partie régulière que les termes de degré inférieur ou égal à 2, les autres rentrant dans le reste :

$$\ln(1 + e^x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\,\varepsilon(x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + x^2\,\varepsilon(x).$$

Exercice 7.

1) Donner le D.L. à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de $g : x \to 1 + (x - 1)e^{x-1}$.

2) Donner un D.L. à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de $f : x \to \ln(1 + (x-1)e^{x-1})$.

3) Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{f(x)}{x - 1}$ et $h(1) = 1$. Montrer que h est continue et dérivable en 1.

Solution

1)Posons $x = 1 + h$. $g(x) = g(1 + h) = 1 + he^h$. Et puisque h est voisin de 0 lorsque x est voisin de 1, $e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$. Et

$g(1 + h) = 1 + h + h^2 + \frac{h^3}{2} + h^3\varepsilon(h)$ (le terme d'ordre 3 rentre dans le reste d'ordre 2)

$g(1 + h) = 1 + h + h^2 + h^2\varepsilon(h)$.

On a aussi : $g(x) = 1 + (x - 1) + (x - 1)^2 + (x - 1)^2\,\varepsilon(x-1)$ avec $\lim_{x\to 1}\varepsilon(x-1) = 0$.

2) Utilisons toujours le même changement de variable : $f(1 + h) = \ln(1 + he^h) = \ln(g(1+h))$ et en utilisant le résultat précédent : $f(1 + h) = \ln(1 + h + h^2 + h^2\varepsilon(h))$.

Posons $u = h + h^2 + h^2\varepsilon(h)$, u est voisin de 0 puisque h l'est et en remplaçant x par u dans le D.L. du cours :

$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\,\varepsilon(u)$ avec $\lim\limits_{u\to 0}\varepsilon(u) = 0$. Puis en remplaçant u par $h + h^2 + h^2\varepsilon(h)$, on obtient $f(1 + h) = (h + h^2 + h^2\varepsilon(h)) - \frac{(h + h^2 + h^2\varepsilon(h))^2}{2} + h^2\,\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$. Et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 2, les autres rentrant dans le reste d'ordre 2 : $f(1 + h) = h + \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)$. Soit $f(x) = (x - 1) + \frac{(x - 1)^2}{2} + (x - 1)^2\,\varepsilon(x-1)$ avec $\lim\limits_{x\to 1}\varepsilon(x-1) = 0$.

3) h est continue en 1 si et seulement si $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = h(1)$.

Or $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \left((x - 1) + \frac{(x - 1)^2}{2} + (x - 1)^2\,\varepsilon(x-1)\right)$

$\lim\limits_{x\to 1} h(x) == \lim\limits_{x\to 1} \left(1 + \frac{(x - 1)}{2} + (x - 1)\,\varepsilon(x-1)\right) = 1 = h(1)$. Et h est bien continue en 1.

h est dérivable en 1 si et seulement si $\lim\limits_{x\to 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1}$ existe et est finie.

Or $\lim\limits_{x\to 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\left(1 + \frac{(x - 1)}{2} + (x - 1)\,\varepsilon(x-1)\right) - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{2} + \varepsilon(x-1)\right) = \frac{1}{2}$.

h est donc bien dérivable en 1 et $h'(1) = \frac{1}{2}$.

Exercice 8. Calculer à l'aide d'un D.L. adequat, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$.

Solution

D'après le D.L. du cours, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) - x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2} + \varepsilon(x)$ Et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Exercice 9.
1) Déterminer le D.L. à l'ordre 2 et au vosinage de 1 de $x \to x\ln x$.
2) En déduire $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x\ln x}{x^2 - 1}$.

Solution

1) Posons x = 1 + h (x est voisin de 1, donc h est voisin de 0). D'après le cours puisque h est voisin de 0, $\ln(1 + h) = h - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$. Et

$$x\ln x = (1 + h)\ln(1 + h) = (1 + h)\left(h - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)\right) = h + \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)$$

ou $x\ln x = (x - 1) + \frac{(x - 1)^2}{2} + (x - 1)^2\varepsilon(x-1)$ avec $\lim\limits_{x\to 1}\varepsilon(x-1) = 0$.

2) $$\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x - 1) + \frac{(x - 1)^2}{2} + (x - 1)^2\varepsilon(x-1)}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{1 + \frac{(x - 1)}{2} + (x - 1)\varepsilon(x-1)}{x + 1} = \frac{1}{2}\ .$$

Exercice 10. Soit $f : x \to e^{1/x}\sqrt{x^2 - 1}$.

1) Déterminer un D.L. d'ordre 3 de $\frac{f(x)}{x}$ au voisinage de $+\infty$.

2) En déduire que C(f) admet une asymptote oblique quand $x \to +\infty$.

3) Etudier la position de C(f) par rapport à cette asymptote.

4) Faire de même pour $x \to -\infty$, sans recommencer tous les calculs.

Solution

1) Posons $h = \frac{1}{x}$ (si x est voisin de $+\infty$, h est voisin de 0^+).

$$e^{1/x}\sqrt{x^2 - 1} = e^h\sqrt{\frac{1 - h^2}{h^2}} = \frac{e^h}{h}\sqrt{1 - h^2}\quad \text{(car } h > 0\text{)}.$$

$\frac{f(x)}{x} = hf(\frac{1}{h}) = e^h\sqrt{1 - h^2}$. 0r puisque h est voisin de 0

$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + h^3\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ et $\sqrt{1 - h^2} = (1 - h^2)^{1/2}$ et en remplaçant x par h^2 et m par $\frac{1}{2}$ dans le 2ème D.L. l'encadré du cours, $\sqrt{1 - h^2} = 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{8} + h^4\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$. D'où $e^h\sqrt{1 - h^2} = (1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + h^3\varepsilon(h))(1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{8} + h^4\varepsilon(h))$, et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égaux à 3 dans la partie principale, on obtient le D.L. d'ordre 3 $e^h\sqrt{1 - h^2} = 1 + h + \frac{h^3}{6} + h^3\varepsilon(h)$. Et

$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{x^3}\ \varepsilon(\frac{1}{x})$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$. D'où

$f(x) = x + 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{x^2}\ \varepsilon(\frac{1}{x})$.

2) On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x + 1)) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{6x^2} + \frac{1}{x^2}\ \varepsilon(\frac{1}{x})) = 0$. Et donc que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à C(f) quand x tend vers $+\infty$.

3) $f(x) - (x + 1) = \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{x^2}\ \varepsilon(\frac{1}{x}) \geq 0$ au voisinage de $+\infty$ puisqu'alors $\frac{1}{x^2}\ \varepsilon(\frac{1}{x})$ est négligeable devant $\frac{1}{6x^2}$. C(f) est donc au dessus de l'asymptote quand x tend vers $+\infty$.

4) Quand x tend vers $-\infty$, le calcul est très semblable, mais h tend vers 0^- et

$\sqrt{\frac{1 - h^2}{h^2}} = -h\sqrt{1 - h^2}$. Et $\frac{f(x)}{x} = hf(\frac{1}{h}) = -e^h\sqrt{1 - h^2}$. Ensuite les calculs reste valables et $\frac{f(x)}{x}$ $= -(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{x^3}\ \varepsilon(\frac{1}{x}))$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$. D'où

$f(x) = -x - 1 - \frac{1}{6x^2} - \frac{1}{x^2}\ \varepsilon(\frac{1}{x})$. Ainsi C(f) admet la droite d'équation $y = -x - 1$ comme asymptote quant x tend vers $-\infty$ et la courbe est en dessous de l'asymptote.

En effet $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (-x - 1)) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-\frac{1}{6x^2} - \frac{1}{x^2}\ \varepsilon(\frac{1}{x})) = 0$ et

$f(x) - (-x - 1) = -\frac{1}{6x^2} - \frac{1}{x^2}\ \varepsilon(\frac{1}{x}) \leq 0$ au voisinage de $-\infty$.

Exercice 11. Soit $f : x \to \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$ pour $x > 3$.
1) Déterminer un D.L. d'ordre 2 de $\frac{f(x)}{x}$ au voisinage de $+\infty$.
2) En déduire que C(f) admet une asymptote oblique quand $x \to +\infty$.
3) Etudier la position de C(f) par rapport à cette asymptote.

Solution

1) $\sqrt[3]{4x^3 - 12x} = \sqrt[3]{4x^3(1 - \frac{3}{x^2})} = \sqrt[3]{4x^3}\sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2}} = \sqrt[3]{4}\ x(1 - \frac{3}{x^2})^{1/3}$, donc

$\frac{f(x)}{x} = \sqrt[3]{4}\ (1 - \frac{3}{x^2})^{1/3}$. Posons $h = \frac{1}{x}$ (h est voisin de 0 puisque x tend vers $+\infty$) et

$\frac{f(x)}{x} = hf(\frac{1}{h}) = \sqrt[3]{4}\ (1 - 3h^2)^{1/3}$. En remplaçant x par $-3h^2$ et m par $\frac{1}{3}$ dans le 2ème D.L. l'encadré du cours, on obtient $(1 - 3h^2)^{1/3} = 1 - h^2 + h^2\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. Et

$\frac{f(x)}{x} = hf(\frac{1}{h}) = \sqrt[3]{4}\ (1 - 3h^2)^{1/3} = \sqrt[3]{4}\ (1 - h^2 + h^2\varepsilon(h)) = \sqrt[3]{4}\ (1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\ \varepsilon(\frac{1}{x}))$ avec

$\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(\frac{1}{x})$.

2) On en déduit que $f(x) = \sqrt[3]{4}\, x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\, \varepsilon(\frac{1}{x})$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \sqrt[3]{4}\, x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\, \varepsilon(\frac{1}{x})) = 0$. Donc $y = \sqrt[3]{4}\, x$ est asymptote oblique à C(f) quand x tend vers $+\infty$.

3) $f(x) - \sqrt[3]{4}\, x = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\, \varepsilon(\frac{1}{x}) \leq 0$ quand x tend vers $+\infty$ puisqu'alors $\frac{1}{x}\, \varepsilon(\frac{1}{x})$ est négligeable devant $-\frac{1}{x}$. Et C(f) est en dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 12. Soit $f : x \to (x - 2)\exp(\frac{x - 1}{2x})$.

1) Déterminer un D.L. d'ordre 2 de $\frac{f(x)}{x}$ au voisinage de $+\infty$.

2) En déduire que C(f) admet une asymptote oblique quand $x \to +\infty$.

3) Etudier la position de C(f) par rapport à cette asymptote.

Solution

Posons $h = \frac{1}{x}$ ((h est voisin de 0 puisque x tend vers $+\infty$) alors

$f(x) = (x - 2)\exp(\frac{x - 1}{2x}) = f(\frac{1}{h}) = (\frac{1}{h} - 2)\exp(\frac{1}{2} - \frac{h}{2})$ et

$\frac{f(x)}{x} = hf(\frac{1}{h}) = (1 - 2h)\exp(\frac{1}{2} - \frac{h}{2}) = (1 - 2h)e^{1/2}e^{-h/2}$. En remplaçant dans le 4ème D.L. de l'encadré du cours x par $-h/2$ qui tend bien vers 0, on obtient

$e^{-h/2} = 1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{8} + h^2\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

D'où $hf(\frac{1}{h}) = \sqrt{e}\,(1 - 2h)(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{8} + h^2\varepsilon(h)) = \sqrt{e}\,(1 - \frac{5h}{2} + \frac{9h^2}{8} + h^2\varepsilon(h))$ et

$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{e}\,(1 - \frac{5}{2x} + \frac{9}{8x^2} + \frac{1}{x^2}\, \varepsilon(\frac{1}{x})$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(\frac{1}{x})$.

2) On en déduit que $f(x) = \sqrt{e}\,(x - \frac{5}{2} + \frac{9}{8x} + \frac{1}{x}\, \varepsilon(\frac{1}{x}))$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (\sqrt{e}\,(x - \frac{5}{2}))) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{9}{8x} + \frac{1}{x}\, \varepsilon(\frac{1}{x})) = 0$. Et C(f) admet la droite d'équation

$y = \sqrt{e}\,(x - \frac{5}{2})$ comme asymptote quand x tend vers $+\infty$.

3) $f(x) - (\sqrt{e}\,(x - \frac{5}{2})) = \frac{9}{8x} + \frac{1}{x}\,\varepsilon(\frac{1}{x}) \geq 0$ au voisinage de $+\infty$ puisque $\frac{1}{x}\,\varepsilon(\frac{1}{x})$ est négligeable devant $\frac{9}{8x}$ sur ce voisinage. C(f) est au dessus de l'asymptote quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 13.* Soit l'expression $f(x,y) = x\ln y - (y-1)\ln x - y + 1$.
Etudier le signe de f(x,y) pour x et y voisins de 1.

Solution

Posons $x = 1 + h$ et $y = 1 + k$. h et k sont voisins de 0 lorsque x et y sont voisins de 1.

$f(x,y) = f(1 + h, 1 + k) = (1 + h)\ln(1 + k) - k.\ln(1 + h) - k$. D'autre part d'après le cours :

$\ln(1 + k) = k - \frac{k^2}{2} + k^2\,\varepsilon(k)$ avec $\lim\limits_{k\to 0}\varepsilon(k) = 0$.

$\ln(1 + h) = h - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$. Et

$f(1 + h, 1 + k) = (1 + h)(\,k - \frac{k^2}{2} + k^2\,\varepsilon(k)) - k(h - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)) - k$. Et en ne gardant dans la partie principale que les termes d'ordre inférieur ou égaux à 2 pour obtenir un D.L. à l'ordre 2 :

$f(1 + h, 1 + k) = -\frac{k^2}{2}$ + reste (le reste est négligeable devant $-\frac{k^2}{2}$).

Ainsi $f(x,y) = f(1 + h, 1 + k) \approx -\frac{k^2}{2} \leq 0$ pour x et y voisins de 1.

Indications

Exercice **11** : On remarquera que

$$\sqrt[3]{4x^3 - 12x} = \sqrt[3]{4x^3(1 - \frac{3}{x^2})} = \sqrt[3]{4x^3}\,\sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2}} = \sqrt[3]{4}\ x(1 - \frac{3}{x^2})^{1/3}.$$