Leçon 06 – Correction des "exercez-vous"

Exercez-vous 9 :
1) Déterminez le D.L. à l'ordre n de ln(1-x) au voisinage de 0.
2) Déterminez le D.L. à l'ordre n de $\frac{1}{(1-x)^2}$ au voisinage de 0.
3) Donnez le D.L. à l'ordre 4 et au voisinage de 1 de la primitive de $\frac{e^x}{\ln(-x^2+2)+x+1}$ qui s'annule en 0 (on ne demande pas de calculer cette primitive).
4) Donnez le D.L. à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de la dérivée de $\frac{e^x}{\ln(-x^2+2)+x+1}$ (on ne demande pas de calculer cette dérivée).

Solution

1) Sur le voisinage de 0, $]-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}[$, $x \to \ln(1-x)$ admet des dérivées jusqu'à l'ordre n, pour tout $n \in \mathbf{N}$, cette fonction admet donc un D.L. à tous les ordres en 0. Sa dérivée est $-\frac{1}{1-x}$, et d'après le résultat de 3) de l'exemple **6**, au voisinage de 0,

$\frac{1}{1-x} = 1 + x \ldots + x^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x)=0$, et en appliquant la propriété **1**, on obtient, puisque
ln(1 – x) s'annule en 0 :

$$\boxed{\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)} \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x)=0.$$

ln(1 + x) = ln(1 – (-x)). En posant donc u = -x, on reste au voisinage de 0 et

$\ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \ldots - \frac{u^n}{n} + u^n\varepsilon(u)$, puis en remplaçant u par –x :

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)} \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x)=0.$$

2) Sur le voisinage de 0, $]-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}[$, $x \to \frac{1}{(1-x)^2}$ admet des dérivées jusqu'à l'ordre n, elle y admet donc un D.L. à l'ordre n. D'autre part c'est la dérivée de $\frac{1}{1-x}$, et d'après la propriété **2** du cours et puisque

$\frac{1}{1-x} = 1 + x \ldots + x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x)=0$, on a

$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x)=0$.

3) D'après le résultat de 1) de l'exemple **7**, en posant x = 1 + h

$$\frac{e^{1+h}}{\ln(-(1+h)^2+2)+(1+h)+1} = e + 2eh + \frac{11}{2}eh^2 + \frac{49}{3}eh^3 + h^3\,\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0, \text{ et}$$

d'après la propriété **1**, si on note F(x) la primitive de $\dfrac{e^x}{\ln(-x^2+2)+x+1}$ qui s'annule en 0

$$F(1+h) = eh + eh^2 + \frac{11}{6}eh^3 + \frac{49}{12}eh^4 + h^4\,\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0 \text{ ou}$$

$$F(x) = e(x-1) + e(x-1)^2 + \frac{11}{6}e(x-1)^3 + \frac{49}{12}e(x-1)^4 + (x-1)^4\,\varepsilon(x-1) \text{ avec } \lim_{x\to 1}\varepsilon(x-1) = 0.$$

4) D'après le résultat de 1) de l'exemple **8**, en posant x = 1 + h

$$\frac{e^{1+h}}{\ln(-(1+h)^2+2)+(1+h)+1} = e + 2eh + \frac{11}{2}eh^2 + \frac{49}{3}eh^3 + h^3\,\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0, \text{ et}$$

d'après la propriété **2**, si on note f'(x) la dérivée de $\dfrac{e^x}{\ln(-x^2+2)+x+1}$,

$$f'(1+h) = 2^e + 11eh + 49eh^2 + h^2\,\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0, \text{ ou}$$

$$f'(x) = 2e + 11e(x-1) + 49e(x-1)^2 + (x-1)^2\,\varepsilon(x-1) \text{ avec } \lim_{x\to 1}\varepsilon(x-1) = 0.$$

(En effet, la dérivée de $x \to \dfrac{e^x}{\ln(-x^2+2)+x+1}$ admet un D.L. à l'ordre 2 puisque cette fonction est dérivable jusqu'à l'ordre 3 au moins, sur un voisinage de 1 suffisamment petit).