Leçon 06 – Correction des "exercez-vous"

Exercez-vous 8 : 1) En utilisant des résultats précédents (afficher le résultat du début de 2) l'exercez-vous **5** et celui de 2) de l'exemple **6**), donnez le D.L. à l'ordre 3 et au voisinage de 1 de $\dfrac{e^x}{\ln(-x^2+2)+x+1}$

2) En utilisant des résultats précédents de l'exemple **5** et celui de 2) de l'exercez-vous **6**), donnez le D.L. à l'ordre 3 et au voisinage de 1 de $\dfrac{\ln(-x^2+2)+x+1}{e^x}$.

Solution

1) D'après le résultat de 2) de l'exercez-vous **6**, au voisinage de 1 et en posant x = 1 + h :

$e^{1+h} = e + eh + e\dfrac{h^2}{2} + e\dfrac{h^3}{6} + h^3\,\varepsilon(h)$ et d'après le résultat de 2) de l'exercez-vous **5**,

$\ln(-(1+h)^2+2) + (1+h) + 1 = 1 - h - 3h^2 - \dfrac{14}{3}h^3 + h^3\,\varepsilon(h)$. En appliquant le résultat du cours sur le D.L. de $\dfrac{f}{g}$, on obtient

$$\frac{e^{1+h}}{\ln(-(1+h)^2+2)+(1+h)+1} = \left[\frac{e + eh + e\dfrac{h^2}{2} + e\dfrac{h^3}{6}}{1 - h - 3h^2 - \dfrac{14}{3}h^3}\right]_3 + h^3\,\varepsilon(h).$$

Pour calculer $\left[\dfrac{e + eh + e\dfrac{h^2}{2} + e\dfrac{h^3}{6}}{1 - h - 3h^2 - \dfrac{14}{3}h^3}\right]_3$, remarquons d'abord que l'on peut mettre e en facteur :

$\left[\dfrac{e + eh + e\dfrac{h^2}{2} + e\dfrac{h^3}{6}}{1 - h - 3h^2 - \dfrac{14}{3}h^3}\right]_3 = e\left[\dfrac{1 + h + \dfrac{h^2}{2} + e\dfrac{h^3}{6}}{1 - h - 3h^2 - \dfrac{14}{3}h^3}\right]_3$. Posons la division :

$$
\begin{array}{l|l}
1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} & 1 - h - 3h^2 - \frac{14}{3}h^3 \\
- & \\
1 - h - 3h^2 - \frac{14}{3}h^3 & 1 + 2h + \frac{11}{2}h^2 + \frac{49}{3}h^3 \\
\hline
2h + \frac{7}{2}h^2 + \frac{29}{6}h^3 & \\
- & \\
2h - 2h^2 - 6h^3 & \\
\hline
\frac{11}{2}h^2 + \frac{65}{6}h^3 & \\
- & \\
\frac{11}{2}h^2 - \frac{11}{2}h^3 & \\
\hline
\frac{49}{3}h^3 &
\end{array}
$$

Et $\left[\dfrac{e + eh + e\frac{h^2}{2} + e\frac{h^3}{6}}{1 - h - 3h^2 - \frac{14}{3}h^3}\right]_3 = e + 2eh + \dfrac{11}{2}eh^2 + \dfrac{49}{3}eh^3$, d'où le D.L.

$\dfrac{e^{1+h}}{\ln(-(1 + h)^2 + 2) + (1 + h) + 1} = e + 2eh + \dfrac{11}{2}eh^2 + \dfrac{49}{3}eh^3 + h^3\,\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$, ou

$\dfrac{e^x}{\ln(-x^2 + 2) + x + 1} = e + 2e(x - 1) + \dfrac{11}{2}e(x - 1)^2 + \dfrac{49}{3}e(x - 1)^3 + (x - 1)^3\,\varepsilon(x-1)$ avec $\lim\limits_{x\to 1}$ $\varepsilon(x-1) = 0$.

2) D'après le résultat de 2) de l'exemple **6**, au voisinage de 1 et en posant $x = 1 + h$:
$e^{1+h} = e + eh + e\dfrac{h^2}{2} + e\dfrac{h^3}{6} + h^3\,\varepsilon(h)$ et d'après le résultat de 2) de l'exemple **5**,

$\ln(-(1 + h)^2 + 2) + (1 + h) + 1 = 1 - h - 3h^2 - \dfrac{14}{3}h^3 + h^3\,\varepsilon(h)$. En appliquant le résultat du cours sur le D.L. de $\dfrac{f}{g}$, on obtient

$$\frac{\ln(-(1+h)^2+2)+(1+h)+1}{e^{1+h}} = \left[\frac{1-h-3h^2-\frac{14}{3}h^3}{e+eh+e\frac{h^2}{2}+e\frac{h^3}{6}}\right]_3 + h^3\,\varepsilon(h).$$

Pour calculer $\left[\frac{1-h-3h^2-\frac{14}{3}h^3}{e+eh+e\frac{h^2}{2}+e\frac{h^3}{6}}\right]_3$, remarquons d'abord que l'on peut mettre 1/e en facteur : $\left[\frac{1-h-3h^2-\frac{14}{3}h^3}{e+eh+e\frac{h^2}{2}+e\frac{h^3}{6}}\right]_3 = \frac{1}{e}\left[\frac{1-h-3h^2-\frac{14}{3}h^3}{1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}}\right]_3$. Posons la division :

$$\begin{array}{l|l}
1-h-3h^2-\frac{14}{3}h^3 & 1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6} \\
- & \overline{\phantom{1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}}} \\
1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6} & 1-2h-\frac{3}{2}h^2-\frac{17}{3}h^3 \\
\hline
-2h-\frac{7}{2}h^2-\frac{49}{6}h^3 & \\
- & \\
-2h-2h^2-h^3 & \\
\hline
-\frac{3}{2}h^2-\frac{43}{6}h^3 & \\
-\frac{3}{2}h^2-\frac{3}{2}h^3 & \\
\hline
-\frac{17}{3}h^3 &
\end{array}$$

Ainsi $\left[\frac{1-h-3h^2-\frac{14}{3}h^3}{1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}}\right]_3 = 1-2h-\frac{3}{2}h^2-\frac{17}{3}h^3$ et

$$\frac{\ln(-(1+h)^2+2)+(1+h)+1}{e^{1+h}} = \frac{1}{e} - \frac{2}{e}h - \frac{3}{2e}h^2 - \frac{17}{3e}h^3 + h^3\,\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0, \text{ ou}$$

$$\frac{\ln(-x^2+2)+x+1}{e^x} = \frac{1}{e} - \frac{2}{e}(x-1) - \frac{3}{2e}(x-1)^2 - \frac{17}{3e}(x-1)^3 + (x-1)^3\,\varepsilon(x-1) \text{ avec } \lim_{x\to 1}$$
$\varepsilon(x-1) = 0$.