Leçon 06 – Correction des "exercez-vous"

Exercez-vous 7 :

1) Déduisez des résultats des précédents exemples le D.L à l'ordre 4 et au voisinage de 0 de $e^x + \frac{1}{1 - x}$.

2) Déduisez des résultats des précédents exemples le D.L à l'ordre 4 et au voisinage de 2 de $\frac{e^x}{x - 1}$.

3) Déduisez des résultats des précédents exemples le D.L. à l'ordre 3 et au voisinage de 1 de $e^x(\ln(-x^2 + 2) + x + 1)$.

Solution

1) D'après le résultat de 1) de l'exercez-vous **6**, au voisinage de 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\,\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x)=0.$$

Et d'après le résultat 3) de l'exercez-vous **6**, au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^4\,\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x)=0.$$

En appliquant le résultat du cours sur le D.L. de f + g,

$$e^x + \frac{1}{1 - x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^4\,\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x)=0.$$

Et $e^x + \frac{1}{1 - x} = 2 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{6}x^3 + \frac{25}{24}x^4 + x^4\,\varepsilon(x)$, c'est le D.L. cherché.

2) En reprenant $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\,\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x)=0$, et

$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^4\,\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x)=0$ et en appliquant le résultat du cours sur le D.L. de f.g, on obtient, au voisinage de 0 :

$$\frac{e^x}{1 - x} = [(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24})(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)]_4 + x^4\,\varepsilon(x)$$

Or $[(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24})(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)]_4 = 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{65}{24}x^4$ et

$\frac{e^x}{1 - x} = 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{65}{24}x^4 + x^4\,\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x)=0$, c'est le D.L. cherché.

3) D'après le résultat de 2) de l'exercez-vous **6**, au voisinage de 1 et en posant x = 1 + h :

$e^{1+h} = e + eh + e\frac{h^2}{2} + e\frac{h^3}{6} + h^3\,\varepsilon(h)$ et d'après le résultat de 2) de l'exercez-vous **5**,

$\ln(-(1 + h)^2 + 2) + (1 + h) + 1 = 1 - h - 3h^2 - \frac{14}{3} h^3 + h^3 \varepsilon(h)$. En appliquant le résultat du cours sur le D.L. de f.g, on obtient

$$e^{1+h}(\ln(-(1 + h)^2 + 2) + (1 + h) + 1) = [(e + eh + e\frac{h^2}{2} + e\frac{h^3}{6})(1 - h - 3h^2 - \frac{14}{3} h^3)]_3 + h^3\varepsilon(h).$$

Or $[(e + eh + e\frac{h^2}{2} + e\frac{h^3}{6})(1 - h - 3h^2 - \frac{14}{3} h^3)]_3 = e - \frac{7e}{2} h^2 - 8eh^3$ et le D.L. cherché est

$$e^{1+h}(\ln(-(1 + h)^2 + 2) + (1 + h) + 1) = e - \frac{7e}{2} h^2 - 8eh^3 + h^3 \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

On peut aussi écrire (puisque $h = x - 1$))

$$e^x(\ln(-x^2 + 2) + x + 1) = e - \frac{7e}{2} (x - 1)^2 - 8e(x - 1)^3 + (x - 1)^3 \varepsilon(x-1) \text{ avec } \lim_{x\to 1} \varepsilon(x-1) = 0$$