Leçon 06 – Correction des "exercez-vous"

Exercez-vous 6 : 1) Déterminez le D.L. de e^x d'ordre 4 au voisinage de 0.
2) Déterminez le D.L. de e^x à l'ordre 4 et au voisinage de 1 puis au voisinage de 2.
3) Déterminez le D.L. à l'ordre n de $\frac{1}{1-x}$ au voisinage de 0.
(vous pourrez utiliser l'identité remarquable : $1 - x^{n+1} = (1 - x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)$).
Déduisez-en celui de $\frac{1}{1 + x}$ au voisinage de 0.
4) Déterminez le D.L. à l'ordre 4 de $\frac{1}{x - 1}$ au voisinage de 2.
5) Déterminez le D.L. d'ordre à l'ordre 3 et au voisinage de 0 de
$x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 7x + 3$.

Solution

1) D'après 3) de l'exemple **5**, on en déduit qu'au voisinage de 0 :

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x)=0$. C'est le D.L. cherché.

2) Au voisinage de 1, posons x = 1 + h.

x est voisin de 1 si et seulement si h est voisin de 0, et $e^x = e^{1+h} = ee^h$.

Remarque : On notera l'utilisation de la transformation $e^{1+h} = ee^h$. En effet 1+h n'est pas voisin de 0 et on ne peut pas remplacer x par 1+h dans le D.L. précédent. Par contre h est voisin de 0 et pour avoir le D.L. de e^h on peut remplacer x par h dans le D.L. précédent.
De façon générale, si u est voisin de 0, on prendra l'habitude d'écrire $e^{a+u} = e^ae^u$.

D'après le résultat précédent, puisque h est voisin de 0 :

$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} + h^4\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ et

$e^{1+h} = e + eh + e\frac{h^2}{2} + e\frac{h^3}{6} + e\frac{h^4}{24} + h^4\varepsilon(h)$. C'est le D.L. cherché (on remarquera que le reste n'a pas été multiplié par e, en effet c'est inutile puisque eε et ε tendent tous les deux vers 0 en 0), on peut aussi écrire

$e^x = e + e(x - 1) + e\frac{(x - 1)^2}{2} + e\frac{(x - 1)^3}{6} + e\frac{(x - 1)^4}{24} + (x - 1)^4\varepsilon(x-1)$ avec $\lim\limits_{x\to 1} \varepsilon(x-1) = 0$.

Au voisinage de 2, posons x = 2 + h.

x est voisin de 2 si et seulement si h est voisin de 0, et $e^x = e^{2+h} = e^2e^h$ (c.f. la remarque précédente). D'où :

$e^{2+h} = e^2 + e^2h + e^2\frac{h^2}{2} + e^2\frac{h^3}{6} + e^2\frac{h^4}{24} + h^4\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$, ou

$e^x = e^2 + e^2(x - 2) + e^2\frac{(x - 2)^2}{2} + e^2\frac{(x - 2)^3}{6} + e^2\frac{(x - 2)^4}{24} + (x-2)^4\varepsilon(x-2)$ avec

$\lim_{x \to 2} \varepsilon(x-2)=0$

3) Si on remarque que $1 - x^{n+1} = (1 - x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)$, on obtient pour x voisin de 0 (par exemple $x \in]-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} [$), $\frac{1}{1 - x} - \frac{x^{n+1}}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$, soit

$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1 - x}$. Et $\frac{x^{n+1}}{1 - x} = x^n \frac{x}{1-x} = x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x)=0$ (c'est un rare cas où $\varepsilon(x)$ est connue, en effet ici $\varepsilon(x) = \frac{x}{1-x}$)

Le D.L. cherché est donc : $\boxed{\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^n \varepsilon(x).}$

On a $\frac{1}{1 + x} = \frac{1}{1 - (-x)}$. Posons donc u = -x, x voisin de 0 équivaut à u voisin de 0, et en remplaçant x par u dans le D.L. précédent, on obtient

$\frac{1}{1 - u} = 1 + u + u^2 + \ldots + u^n + u^n \varepsilon(u)$ et en remplaçant u par sa valeur –x, on a

$\boxed{\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 \ \ldots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)}$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x)=0$.

4) Puisque x est voisin de 2, posons x = 2 + h et h est alors voisin de 0.

$\frac{1}{x - 1} = \frac{1}{2 + h - 1} = \frac{1}{1 + h} = 1 - h + h^2 - h^3 + h^4 + h^4\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$, d'après le résultat précédent. C'est le D.L. cherché, il peut aussi s'écrire

$\frac{1}{x - 1} = 1 - (x - 2) + (x - 2)^2 - (x - 2)^3 + (x - 2)^4 + (x - 2)\varepsilon(x-2)$ avec $\lim_{x \to 2} \varepsilon(x-2)=0$.

5) $x^5 - 2 x^4 + 5 x^3 + 2x^2 - 7x + 3 = 3 - 7x + 2x^2 + 5x^3 + x^3(-2x + x^2)$.

Or pour x voisin de 0, $\lim_{x \to 0}(-2x + x^2)=0$, on peut donc poser $\varepsilon(x) = -2x + x^2$.

$x^5 - 2 x^4 + 5 x^3 + 2x^2 - 7x + 3 = 3 - 7x + 2x^2 + 5x^3 + x^3\varepsilon(x)$ est le D.L. cherché.