Leçon 06 – Correction des "exercez-vous"

Exercez-vous 5 : 1) Ecrivez la formule de Taylor, à l'ordre 2 puis à l'ordre 3 de $x \to x\sqrt{2x + 1}$ au voisinage de 0.
2) Ecrivez la formule de Taylor à l'ordre 3 et au voisinage de 1 de $x \to \ln(-x^2 + 2) + x + 1$.
3) Ecrivez la formule de Taylor à l'ordre n et au voisinage de 0 de $x \to e^x$.
4) Ecrivez la formule de Taylor à l'ordre 4 puis à l'ordre 7 et au voisinage de 0 de $x \to (1 + x)^7$.
5)* Ecrivez la formule de Taylor à l'ordre p et au voisinage de 0 de $x \to (1 + x)^n$.

Solution

1) Au voisinage de 0 par exemple sur $]-\frac{1}{4}\ ;\frac{1}{4}[$, $f : x \to x\sqrt{2x + 1}$ est dérivable à l'ordre 3 et $f(x)$ s'écrit $x(2x + 1)^{1/2}$, d'où

$f'(x) = (2x + 1)^{1/2} + x(2x + 1)^{-1/2}$

$f''(x) = (2x + 1)^{-1/2} + (2x + 1)^{-1/2} - x(2x + 1)^{-3/2} = 2(2x + 1)^{-1/2} - x(2x + 1)^{-3/2}$

$f^{(3)}(x) = -2(2x + 1)^{-3/2} - (2x + 1)^{-3/2} + 3x(2x + 1)^{-5/2} = -3(2x + 1)^{-3/2} + 3x(2x + 1)^{-5/2}$

et $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$ et $f^{(3)}(0) = -3$.

Et la formule de Taylor donne :

Au voisinige de 0 et à l'ordre 2 : $f(x) = x + 2\frac{x^2}{2!} + x^2\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x)=0$, soit

$f(x) = x + x^2 + x^2\,\varepsilon(x)$

Au voisinage de 0 et à l'ordre 3 : $f(x) = x + x^2 - \frac{x^3}{2} + x^3\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x)=0$.

2) Si $f(x) = \ln(-x^2 + 2) + x + 1$, au voisinage de 1 (par exemple sur $]\frac{1}{2}\ ;\frac{3}{2}[$) f est 3 fois dérivable et $f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 2} + 1$, $f''(x) = \frac{-2x^2 - 4}{(x^2 - 2)^2}$ et $f^{(3)}(x) = \frac{4x^3 + 24x}{(x^2 - 2)^3}$.

D'où $f(1) = 2$, $f'(1) = -1$, $f''(1) = -6$, $f^{(3)}(1) = -28$ et la formule de Taylor donne :

pour h voisin de 0 (par exemple $h\in]-\frac{1}{2}\ ;\frac{1}{2}[$),

$f(1 + h) = 2 - h - 3h^2 - \frac{14}{3}h^3 + h^3\,\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h)=0$.

On peut aussi écrire, pour x voisin de 1 (par exemple $x\in]\frac{1}{2}\ ;\frac{3}{2}[$),

$f(x) = 2 - (x-1) - 3(x - 1)^2 - \frac{14}{3}(x - 1)^3 + (x - 1)^3\,\varepsilon(x-1)$ avec $\lim\limits_{x\to 1} \varepsilon(x-1)= 0$.

3) Si on pose $f(x) = e^x$, f est dérivable jusqu'à l'ordre n pour tout $n\in \mathbf{N}$ et $f^{(n)}(x) = e^x$. Donc $f^{(n)}(0) = 1$ pour tout n et $f(0) = 1$. La formule de Taylor donne, au voisinage de 0 :

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\,\varepsilon(x)} \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x)=0.$$

4) Si $f(x) = (1 + x)^7$, f est dérivable jusqu'à l'ordre 7 et $f'(x) = 7(1 + x)^6$,

$f''(x) = 7\times6(1 + x)^5 \ldots f^{(4)}(x) = 7\times6\times5\times 4(1 + x)^3 \ldots f^{(7)}(x) = 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 7!$. D'où la formule de Taylor à l'ordre 4 et au voisinage de 0 :

$$(1 + x)^7 = 1 + 7x + \frac{7\times6}{2!} x^2 + \frac{7\times6\times5}{3!} x^3 + \frac{7\times6\times5\times4}{4!} x^4 + x^4\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x)=0,$$

à l'ordre 7 et au voisinage de 0 :

$$(1 + x)^7 = 1 + 7x + \frac{7\times6}{2!} x^2 + \frac{7\times6\times5}{3!} x^3 + \frac{7\times6\times5\times4}{4!} x^4 + + \frac{76\times5\times4\times3}{5!} x^5 +$$

$$\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2}{6!} x^6 + \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{7!} x^7 + x^7\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x)=0.$$

Remarque : $7 = C_7^1$, $\frac{7\times6}{2!} = C_7^2$, ..., $\frac{7\times6\times5\times4}{4!} = C_7^4$, ..., $\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{7!} = C_7^7 = 1$.

Or d'après la formule du binôme de Newton

$(1 + x)^7 = 1 + C_7^1 x + C_7^2 x^2 + \ldots + C_7^p x^p + \ldots + C_7^6 x^6 + x^7$.

Ainsi dans la formule de Taylor précédente $\varepsilon(x)=0$.

5) Si $f(x) = (1 + x)^n$, f est dérivable jusqu'à l'ordre n, quelque soit $n\in \mathbf{N}$ et

$f'(x) = n(1 + x)^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)(1 + x)^{n-2}$ ...., et si $p < n$,

$f^{(p)}(x) = n(n-1) \ldots (n-p+1)(1 + x)^{n-p}$, et si $p = n$, $f^{(n)}(x) = n!$ et si $p > n$, $f^{(p)}(x) = 0$.

D'où $f(0) = 1$, $f^{(p)}(0) = = n(n-1) \ldots (n-p+1)$ si $p < n$, $f^{(n)}(0) = n!$ et $f^{(p)}(0) = 0$ si

$p > n$. La formule de Taylor à l'ordre p et au voisinage de 0 donne :

si $p < n$, $f(x) = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \ldots.. \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)x^p}{p!} + x^p\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x)=0$,

si $p = n$, $f(x) = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \ldots.. \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)x^p}{p!} + \ldots + x^n + x^n\,\varepsilon(x)$, mais ici $\varepsilon(x) = 0$ puisque la formule précédente n'est rien d'autre que la formule du binôme de Newton appliquée à $(1 + x)^n$

(Rappel important : la formule du binôme de Newton est

$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^p a^{n-p}b^p + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n$

avec $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}$).

et $f(x) = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \ldots.. \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)x^p}{p!} + \ldots + x^n$, de même si $p > n$,

$f(x) = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \ldots.. \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)x^p}{p!} + \ldots + x^n$ (les autres termes sont nuls).