Leçon 06 – Correction des "exercez-vous"

Exercez-vous 10 : 1) Trouvez directement (sans utiliser la formule de Taylor) en utilisant l'encadré précédent et les propriétés des D.L. le D.L. à l'ordre 3 de $x\sqrt{2x+1}$ au voisinage de 0.
2) Trouvez directement (sans utiliser la formule de Taylor) en utilisant l'encadré précédent et les propriétés des D.L. le D.L. à l'ordre 3 de $\ln(-x^2 + 2) + x + 1$ au voisinage de 1.

Solution

1) Si x est voisin de 0, 2x l'est aussi et d'après la deuxième formule de l'encadré du cours, en prenant $m = \frac{1}{2}$ et en remplaçant x par 2x, on obtient

$$(1 + 2x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\,(2x) + \frac{1/2(-1/2)}{2!}(2x)^2 + x^2\varepsilon(x) = 1 + x - \frac{x}{2}\,x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

et $x\sqrt{2x+1} = x + x^2 - \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. On retrouve ainsi le résultat obtenu par la formule de Taylor dans 1) de l'exercez-vous **5**, mais avec beaucoup moins de difficulté !

2) Posons x = 1 + h, alors si x est voisin de 1, h est voisin de 0
$\ln(-x^2 + 2) + x + 1 = \ln(1 + (-2h - h^2)) + 2 + h$. Or si h est voisin de 0, $(-2h - h^2)$ aussi et en utilisant la troisième ligne de l'encadré du cours, et en remplaçant x par $(-2h - h^2)$, on obtient

$$\ln(1 + (-2h - h^2)) = (-2h - h^2) - \frac{(-2h - h^2)^2}{2} + \frac{(-2h - h^2)^3}{3} + h^3\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Dans la partie régulière on ne conserve que les termes de degré inférieur ou égal à trois :

$\ln(1 + (-2h - h^2)) = -2h - 3h^2 - \frac{14}{3}\,h^3 + h^3\varepsilon(h)$, et le D.L. cherché est

$$\ln(1 + (-2h - h^2)) + 2 + h = 2 - h - 3h^2 - \frac{14}{3}\,h^3 + h^3\varepsilon(h) \text{ ou}$$

$$\ln(-x^2 + 2) + x + 1 = 2 + (x-1) - 3(x-1)^2 - \frac{14}{3}\,(x-1)^3 + (x-1)^3\varepsilon(x-1) \text{ avec } \lim_{x\to 1} \varepsilon(x-1) = 0.$$

Là encore on retrouve le résultat obtenu par la formule de Taylor dans 2) de l'exercez-vous **5**, mais plus rapidement !