Leçon 06 – Correction des "exercez-vous"

Exercez-vous 1 : 1) Soit $x \to x^3 + 2x^2 - 7x + 3$. Peut-on appliquer le théorème de Rolle sur $[-4 ; 1]$? Si oui qu'obtient-on ?

2) Soit $x \to x\ln(2x^2 - x)$. Peut-on appliquer le théorème de Rolle sur $[-\frac{1}{2} ; 1]$? Si oui qu'obtient-on ?

3) Soit $x \to x\ln(x^2 - x + 1)$. Peut-on appliquer le théorème de Rolle sur $[0 ; 1]$? Si oui qu'obtient-on ?

Solution

1) Si $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 3$, f est définie et continue sur sur $[-4 ; 1]$ et est dérivable sur $]-4 ; 1[$ et $f(-4) = f(1) = -1$.
Le théorème de Rolle s'applique donc et on obtient l'existence d'un réel $c \in]-4 ; 1[$ tel que $f'(c) = 0$.
Ici on peut calculer c, puisque $f'(x) = 3x^2 + 4x - 7$ et que $f'(c) = 0$ équivaut à $3c^2 + 4c - 7 = 0$, soit $c = 1$ ou $c = \frac{-7}{3}$. Et le c du théorème de Rolle ici est $\frac{-7}{3}$ puisque $c \in]-4 ; 1[$.

2) Si $f(x) = x\ln(2x^2 - x)$, $f(-\frac{1}{2}) = f(1) = 0$, mais si $x \in [-\frac{1}{2} ; 1]$, $2x^2 - x \in [-\frac{1}{4} ; 1]$ et f n'est pas définie sur $[-\frac{1}{2} ; 1]$. Le théorème ne s'applique donc pas.

3) Ici, $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ sur **R**. f est donc définie et continue sur $[0 ; 1]$ et est dérivable sur $]0 ; 1[$. De plus $f(0) = f(1) = 0$. Le théorème de Rolle s'applique et assure l'existence d'un réel $c \in]0 ; 1[$ tel que $f'(c) = 0$.
Or ici $f'(x) = \ln(x^2 - x + 1) + \frac{2x^2 - x}{x^2 - x + 1}$. Le théorème de Rolle permet ici d'assurer l'existence d'au moins une solution à l'équation $\ln(x^2 - x + 1) + \frac{2x^2 - x}{x^2 - x + 1} = 0$ sur $]0 ; 1[$ (cette solution est non nulle !).