Leçon 06 – Correction des avez-vous compris?

Avez-vous bien compris ? 5 : Montrez que les dérivées de f et de PR(f) sont les mêmes jusqu'à l'ordre n si f est n fois dérivable.

Solution

Si f est n fois dérivable, ε l'est aussi puisque PR(f) l'est (polynôme) et

$f'(x) = PR'(f)(x) + (nx^{n-1}\varepsilon(x) + x^n \varepsilon'(x))$ et $nx^{n-1}\varepsilon(x) + x^n \varepsilon'(x)$ peut s'écrire de la forme $x^{n-1} \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$ (on note de la même façon des fonctions ε ayant la propriété $\lim\limits_{x\to 0}$ $\varepsilon(x)=0$, même si elles sont différentes, c'est une convention habituelle qui simplifie les écritures).
Ainsi $f'(x) = PR'(f)(x) + x^{n-1} \varepsilon(x)$ et $f'(0) = PR'(f)(0)$.
En itérant la dérivation, on obtient
$f''(x) = PR''(f)(x) + ((n-1)x^{n-2}\varepsilon(x) + x^{n-1} \varepsilon'(x))$ et $(n-1)x^{n-2}\varepsilon(x) + x^{n-1} \varepsilon'(x)$ est de la forme $x^{n-2}\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$ et
$f''(x) = PR''(f)(x) + x^{n-2}\varepsilon(x)$ et $f''(0) = PR''(f)(0)$. Et ainsi de suite :

si $p < n$ $f^{(p)}(x) = PR^{(p)}(x) + x^{n-p}\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$ et
$f^{(p)}(0) = PR^{(p)}(f)(0)$.
De plus $f^{(n-1)}(x) = PR^{(n-1)}(x) + x\varepsilon(x)$ et en dérivant
$f^{(n)}(x) = PR^{(n)}(x) + (\varepsilon(x) + x\varepsilon'(x))$ et $f^{(n)}(0) = PR^{(n)}(0)$.