

Leçon 06 – Correction des avez-vous compris?

Avez-vous bien compris ? 3 : Que sait-on sur ε ? Pour quelles valeurs de h cette formule a-t-elle un sens ? Quels renseignements donnent cette formule ? Comment approxime-t-on ainsi $f(x_0 + h)$ au voisinage de 0 ? Qu'obtient-on en remplaçant h par $x - x_0$?

Solution

On ne sait rien sur ε , à part que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Ainsi cette formule n'a de sens que si h est voisin de 0, car alors $h^n \varepsilon(h)$ est négligeable devant l'expression qui précède.

Cette formule donne des renseignements sur le comportement de f au voisinage de x_0 seulement, c'est à dire pour une étude **locale** de f autour de x_0 .

Ici cette formule permet d'approximer $f(x_0 + h)$ par un polynôme de degré n en h au voisinage de $h = 0$.

En remplaçant h par $x - x_0$, on obtient

$\forall x \in V_{x_0}$,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0) \text{ avec}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0.$$

On obtient ainsi une approximation de $f(x)$ par un polynôme de degré n en $(x - x_0)$ au voisinage de x_0 . Mais cette expression est équivalente à celle qui figure dans le cours et donne les mêmes renseignements.