Leçon 05 - Cours : Convexité et extrema

Objectif : Dans le cadre des fonctions de **IR** dans **IR**, connaître le lien qui existe entre dérivée et variation d'une fonction dérivable. Savoir les définitions de maximum, minimum, extremum (locaux ou non). Comprendre à quoi correspond la notion de convexité (penser aux dessins correspondants et aux fonctions simples ayant ces propriétés) et savoir le théorème fondamental relatif aux extrema. Utiliser, quand c'est possible la propriété liant convexité, extrema et dérivée seconde. Enfin connaître la notion de point d'inflexion et savoir détecter ceux-ci.

1. Étude des variations d'une fonction dérivable

Dans tout ce paragraphe, on considère une fonction f définie et continue sur [a , b] et dérivable sur]a , b[. Rappelons le théorème permettant d'étudier les variations d'une telle fonction.

Théorème : Si $f'(x) > 0$ (resp. < 0) sur]a , b[, f est strictement croissante (resp. décroissante) sur [a , b].
Si $f'(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0) sur]a , b[, f est croissante (resp. décroissante), strictement ou non, sur [a , b].

2. Extrema

2.1. Définitions

* f admet un **maximum** en x_0 sur l'**intervalle** I si :

$$\forall x \in I : f(x) \leq f(x_0) \quad (1)$$

* f admet un **minimum** en x_0 sur l'**intervalle** I si :

$$\forall x \in I : f(x) \geq f(x_0) \quad (2)$$

* f admet un **maximum local** en x_0, s'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 et vérifiant (1).
* f admet un **minimum local** en x_0, s'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 et vérifiant (2).

* f admet un **extremum** (resp. **extremum local**) en x_0 sur I, si f admet soit un minimum (resp. minimum local) soit un maximum (resp. maximum local).

2.2. Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction admette un extremum local en x_0

Supposons que f soit dérivable en x_0 et admette un maximum local en x_0. Alors
$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie et il existe un intervalle]a , b[contenant x_0 sur lequel $f(x) - f(x_0) \leq 0$.

Or $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ car le numérateur et le dénominateur sont négatifs sur $]a , x_0[$,

et $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ car le numérateur est négatif alors que le dénominateur est positif sur $]x_0 , b[$.

Or cette limite, qui existe, est à la fois positive et négative, elle est donc nulle et nécessairement $f'(x_0) = 0$.

Théorème 2 : Soit f une fonction dérivable dans un intervalle ouvert contenant x_0.
* Si f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

* Si f ' s'annule en x_0 **en changeant de signe** alors f admet un extremum local en x_0. C'est un maximum (resp. minimum) si f'(x) est positif puis négatif (resp. négatif puis positif) lorsque x croît dans un voisinage de x_0.

Théorème 3 : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant x_0.
* Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$ alors f admet un maximum local en x_0.
* Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$ alors f admet un minimum local en x_0.

2.3. Une application économique :

Si f est la fonction totale, on sait que la **fonction moyenne** M associée est $x \to \frac{f(x)}{x}$ et f' est la **fonction marginale**. Supposons f deux fois dérivable.

Propriété : La fonction moyenne $M : x \to \frac{f(x)}{x}$ et la fonction marginale f' ont des représentations graphiques qui se coupent en un extremum local de la fonction moyenne M si f'' y est non nulle.

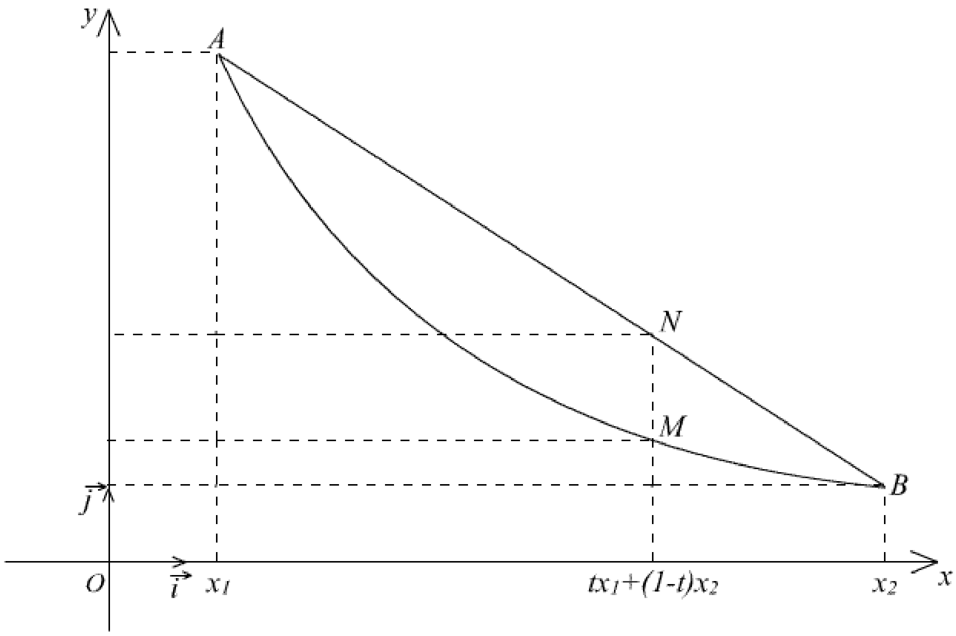
Démonstration *(peut être sautée)* : Cherchons l'abscisse de l'extremum local de la fonction moyenne.
Sa dérivée est $M' : x \to \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\left(f'(x) - \frac{f(x)}{x} \right)$.
On constate donc que : $M'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$
Vérifions la condition du second ordre et calculons $M''(x_0)$:
$M''(x) = -\frac{1}{x^2}\left(f'(x) - \frac{f(x)}{x}\right) + \frac{1}{x}\left(f''(x) - \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}\right)$. Or $M'(x_0) = 0$:
$f'(x_0) - \frac{f(x_0)}{x_0} = \frac{x_0f'(x_0) - f(x_0)}{x_0} = 0$ d'où $M''(x_0) = \frac{f''(x_0)}{x_0}$.
Cet extremum sera un maximum si $\frac{f''(x_0)}{x_0} < 0$. Ce sera un minimum si $\frac{f''(x_0)}{x_0} > 0$.
D'où la preuve.

3. Convexité – concavité

3.1. Convexité

Définition : Une fonction de la variable réelle définie dans un **intervalle I** est **convexe** si:
$\forall(x_1,x_2)\in\mathbf{I}^2$ et $\forall t\in[0,1]$ $f[tx_1 + (1-t)x_2] \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$

Lorsque « $\le$ » est remplacé par « < », on dit que la fonction est strictement convexe.



***Interprétation géométrique* :**

Soit $A\left|\begin{array}{l}x_1\\f(x_1)\end{array}\right.$ et $B\left|\begin{array}{l}x_2\\f(x_2)\end{array}\right.$ 2 points de C(f).

Si $N\left|\begin{array}{l}tx_1+(1-t)x_2\\tf(x_1)+(1-t)f(x_2)\end{array}\right.$,
$N\in[A,B]$ et N est barycentre de A(t) et B(1-t).

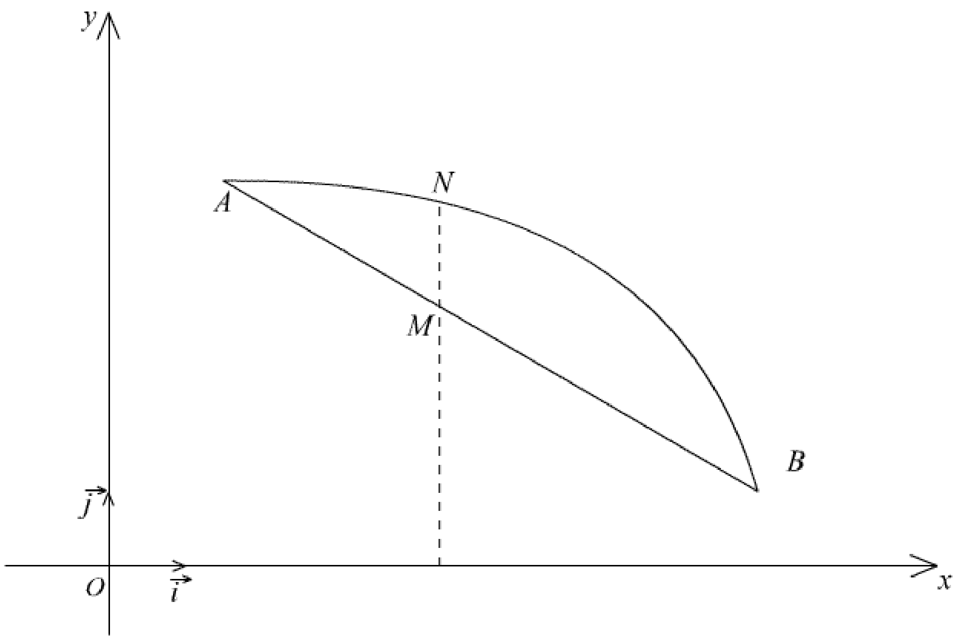
Si $M\left|\begin{array}{c}tx_1+(1-t)x_2\\f(tx_1+(1-t)x_2)\end{array}\right.$ $M\in C(f)$,
M a même abscisse que N et M se trouve en dessous de N d'après l'inégalité.
L'arc de courbe AMB se trouve en dessous de la corde [A , B].

3.2. Concavité

Définition : Une fonction de la variable réelle définie dans un **intervalle I** est **concave** si:
$\forall(x_1,x_2)\in\mathbf{I}^2$ et $\forall t\in[0,1]$ $f[tx_1+(1-t)x_2]\geq tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$.

Lorsque « $\geq$ » est remplacé par « > », on dit que la fonction est strictement concave.

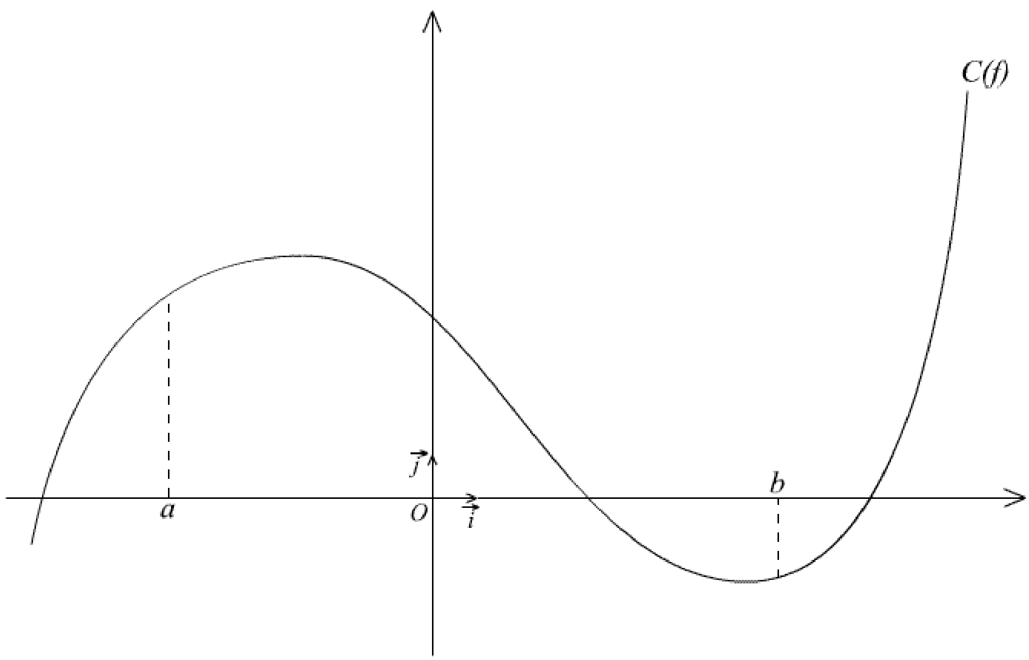
interprétation géométrique : En reprenant les mêmes notations que dans **3.1**, on trouve que M est au dessus de N et que l'arc de courbe AMB est au dessus de la corde [A,B].



Remarque :

1) Il faut se garder d'interpréter les notions de concavité et de convexité comme contraires l'une de l'autre. Il ne faut pas croire que si une fonction n'est pas convexe, elle est concave (c.f. dessin ci-dessous)

2) Par contre si une fonction f est convexe , -f est concave (cela découle immédiatement de la définition).
3)La seule fonction qui est à la fois convexe et concave est la fonction affine :
$x \to ax+b$.



3.3. Propriétés

Trivialement f est convexe sur **I** si et seulement si –f est concave sur **I**.

On admettra la propriété suivante :

Si f_1 , f_2, …, f_p sont convexes (respectivement concaves) sur un même intervalle, toute combinaison linéaire de ces fonctions, de la forme $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_p f_p$, avec $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, .. $\alpha_p \geq 0$ est convexe (respectivement concave) sur ce même intervalle.

4. Convexité, concavité et dérivée première

4.1. Convexité et dérivée première

Voici le premier résultat fondamental qui conduira au théorème fondamental et qui justifie l'étude de telles fonctions quand on s'intéresse à optimiser celles-ci.

Si f est continue sur [a , b] et dérivable sur]a , b[, alors f est convexe sur [a , b] si et seulement si

$$\forall x, x_0 \in]a , b[, f(x) - f(x_0) \geq (x - x_0) f'(x_0)$$

On admettra ce résultat et on en déduit immédiatement le théorème fondamental suivant

Théorème 4 : On considère une fonction f continue et convexe sur [a , b] et dérivable sur]a , b[, et un point x_0 de]a , b[. Alors

$$(f'(x_0) = 0) \Rightarrow (f \text{ a un minimum en } x_0)$$

Ainsi, la condition « $f'(x_0) = 0$ », nécessaire pour que f admette un extremum en x_0 est suffisante si f est convexe (ce qui n'est pas le cas dans un cadre général !), de plus cet extremum est alors un minimum.

Démonstration : D'après le résultat fondamental si $f'(x_0) = 0$, pour tout x de]a , b[, $f(x) - f(x_0) \geq 0$. Ainsi, puisque f est continue sur [a , b], f y admet bien un minimum en x_0.

4.2. Concavité et dérivée première

On obtient bien sûr des résultats analogues pour les fonctions concaves :

Si f est continue sur [a , b] et dérivable sur]a , b[, alors f est concave sur [a , b] si et seulement si

$$\forall x, x_0 \in]a , b[, f(x) - f(x_0) \leq (x - x_0) f'(x_0)$$

On en déduit immédiatement le théorème fondamental suivant

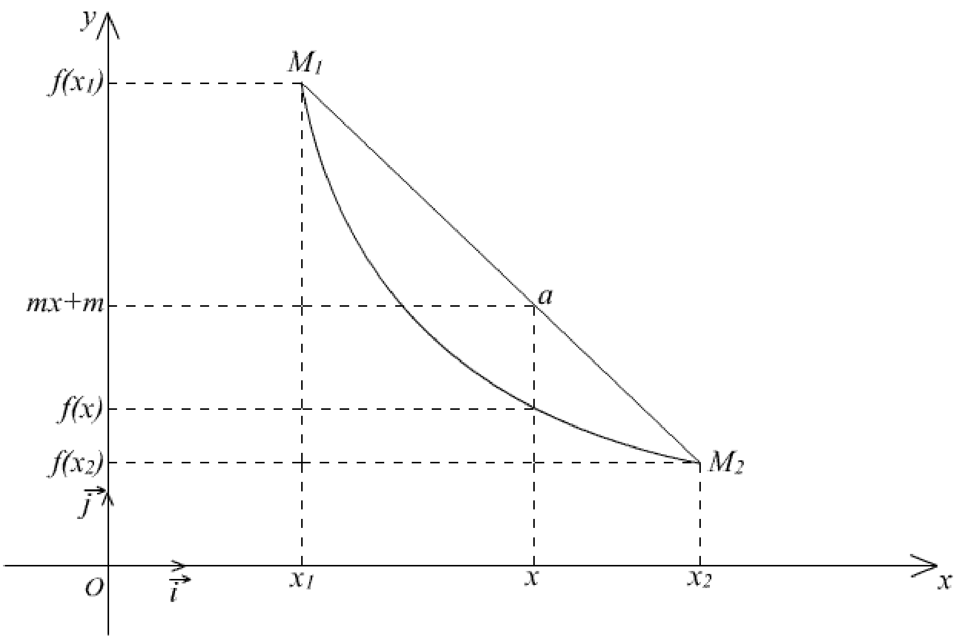
Théorème 5 : On considère une fonction f continue et concave sur [a , b] et dérivable sur]a , b[, et un point x_0 de]a , b[. Alors

$$(f'(x_0) = 0) \Rightarrow (f \text{ a un maximum en } x_0)$$

5. Convexité et dérivée seconde

Théorème 6 : Si une fonction f admet sur un intervalle I une dérivée seconde positive (respectivement négative), f est convexe (resp. concave) sur I.

Démonstration :



Soit x_1 et x_2 deux réels de I et M_1 et M_2, les points de C(f) d'abscisse respective x_1 et x_2.
Soit $y = mx + n$ l'équation de (M_1M_2).
Étudions sur $[x_1,x_2]$ le signe de $\phi(x) = f(x) - (mx + n) = \overline{QM}$.
$\phi'(x) = f'(x) - m$ et $\phi''(x) = f''(x)$.
Comme $\phi(x_1) = \phi(x_2) = 0$, on peut appliquer le théorème de Rolle (ce théorème est rappelé au début de la leçon **6**) et il existe au moins un réel $c \in]x_1,x_2[$ tel que $\phi'(c) = 0$.

D'autre part ϕ' est monotone sur I puisque sa dérivée a un signe fixe, le réel c qui annule $\phi'(x)$ est donc unique et on obtient les tableaux suivants :

$f''(x) > 0$

x	x_1		c		x_2
$\phi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\phi(x)$	0	$\searrow$	μ	$\nearrow$	0

$f''(x) < 0$

x	x_1		c		x_2
$\phi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\phi(x)$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	0

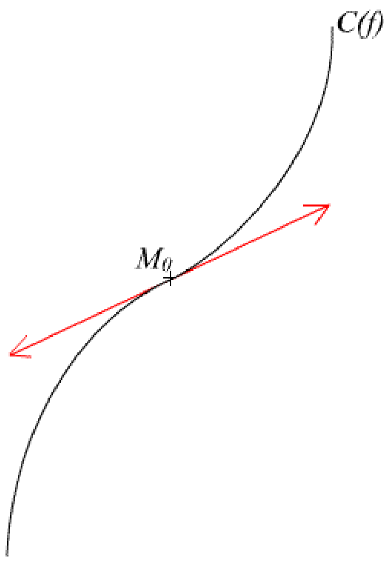
L'arc M_1M_2 de C(f) est donc situé en-dessous de la droite (M_1M_2) si $f''(x) > 0$ et au-dessus si $f''(x) < 0$, ce qui prouve le théorème.

6. Point d'inflexion

On observe parfois que

la dérivée seconde de f s'annule en x0 en changeant de signe.

Cela signifie donc que C(f) change de concavité en $M_0(x_0\,,\,f(x_0))$.
On dit que M_0 est un **point d'inflexion** de C(f), et on obtient en M_0, une représentation graphique de la forme suivante :



Exercices

Exercice 1-On dispose d'une plaque de carton de forme rectangulaire, de 80 cm de long et 50 cm de large, avec laquelle on veut fabriquer une boîte sans couvercle ayant la forme d'un parallélépipède rectangle.
Pour cela on découpe dans chaque coin un carré de côté x et on relève les bords. Pour quelle valeur de x le volume de la boite est-il maximum ? Préciser alors le volume correspondant.

Exercice 2-Une entreprise fabrique une quantité x d'un certain produit. On suppose que x est un réel compris entre 0 et 20 ($0 \leq x \leq 20$) et que le coût de la production f(x) exprimé en milliers d'euros, est donné par :
$f(x) = x^3 - 30x^2 + 300x,\ x \in [0\ ,\ 20]$
1) Etudier les variations de f ainsi que la concavité de C(f). Tracer C(f) en précisant les tangentes aux 4 points d'abscisses 0, 10, 15 et 20.
2) On suppose que toute la production est vendue à un prix de 84 000 € par unité. La recette totale g (exprimée en milliers d'euros) est alors définie par
$g(x) = 84x$.
Soit h(x) le bénéfice total, étudier le signe de h(x) sur [0 , 20]. Interpréter le résultat.
Déterminer la quantité x_{max} assurant à l'entreprise un bénéfice maximal. Donner alors la valeur en euros du bénéfice réalisé.

Exercice 3 - Soit une fonction f définie sur **R** par : * $\forall x \in \mathbf{R}\ f(x+2) = f(x)$
* $\forall x \in [0\ ,\ 2[\ f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx$
1) Déterminer f(2) et trouver, sous la forme d'une relation entre b, c et d une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue en 2.
2) Déterminer b, c et d de manière que f soit continue sur **R** et que C(f) admette le point $A(1, -\frac{1}{2})$ comme extremum local.

Exercice 4 - Soit $f : x \rightarrow -3x^2 + 5x - 6 + 2\ln(x+1)$. Montrer, sans calculer f'', que f est concave sur son ensemble de définition **D** que l'on précisera. En déduire alors que f admet un extremum global sur **D** que l'on précisera ainsi que sa nature (maximum ou minimum).

Exercice 5 - Étudier la concavité de f et les points d'inflexion de C(f) dans les cas suivants :

1) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x + 3$

2) $f(x) = \dfrac{x^3 + x - 2}{x}$.

3) $f(x) = (x+1)\ln(x^2+x)$

4) $f(x) = (x+1)\exp(-x^2)$.