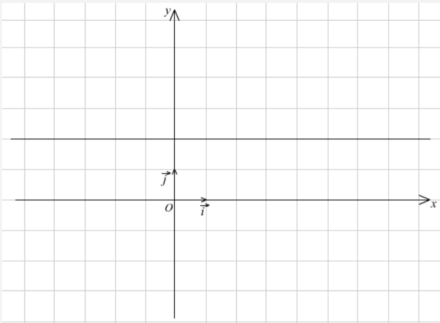
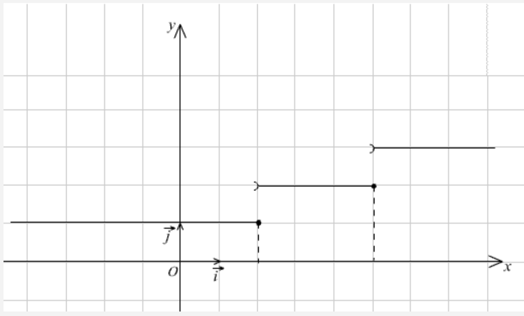
Leçon 04 - Exercices

Pour certains exercices des indications sont données à la fin des énoncés.

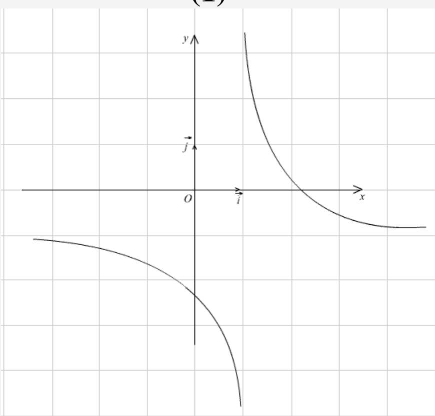
Exercice 1. Pour chacune des représentations graphiques de la fonction f suivantes, préciser l'ensemble de définition de f, les réels où f est continue et l'ensemble de dérivabilité de f.



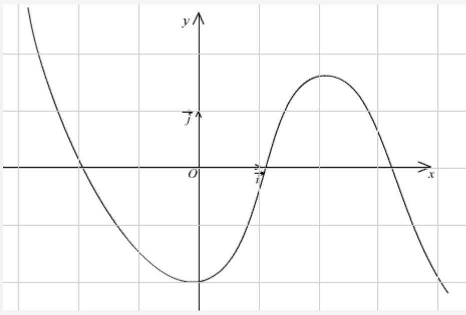
(1)



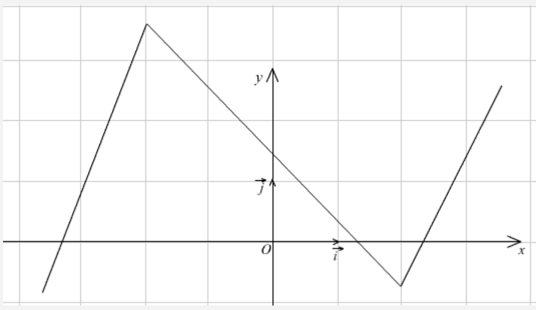
(2)



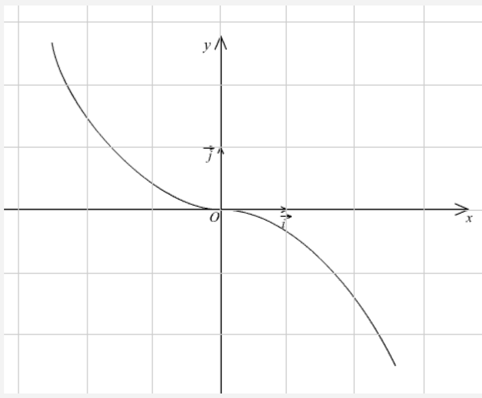
(3)



(4)



(5)



(6)

Exercice 2. Soit $f : t \to |t + 1| + |t - 3|$ et $g : a \to E(2a - 1) + 2$ pour $a \in [-1 ; 2]$.

E(a) désigne la partie entière de a, c'est à dire l'entier immédiatement inférieur ou égal à a :
$E(a) \leq a < E(a) + 1 \quad E(a) \in \mathbf{N}$.

1) Faire une représentation graphique de chacune des fonctions f et g.
2) Préciser leur ensemble de définition, les points où elles sont continues et leur ensemble de dérivabilité.

Exercice 3. Soit $f : x \to -2x^3 + 12x - 10$.
P et Q sont les points de C(f) d'abscisse respective –1 et 2.
Trouver les points de C(f) où la tangente est parallèle à (PQ).

Exercice 4. Considérons la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = -2x^2 + 3x + 1$ et la droite $\mathscr{D}_m$ d'équation $y = mx + 9$, où m est un paramètre réel.
Déterminer les points de $\mathscr{P}$ où la droite $\mathscr{D}_m$ est tangente à $\mathscr{P}$ (on donnera les valeurs du paramètre correspondantes).

Exercice 5. Soit f la fonction définie par : $x \to \dfrac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3}$.
1) Etudier la position de C(f) part rapport à la tangente en A(1,2).
2) Déterminer le point B de C(f) où la tangente est parallèle à la droite δ d'équation $y = x-1$.
3) Déterminer les points d'intersection de C(f) avec (Ox) et les tangentes à C(f) en ces points.
4) Déterminer la tangente à C(f) en D(-3,-10/3), puis étudier la position de C(f) par rapport cette tangente au voisinage de D.

Exercice 6. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}.$$

Exercice 7. Calculer les fonctions dérivées de f dans les cas suivants, après avoir précisé l'ensemble de dérivabilité.

1) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-2)^2}$ 2) $f(x) = \sqrt{2-3x}$ 3)$f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x+1}}$

4) $f(x) = \sqrt{x^2}$ 5) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x-1}}$ 6) $f(x) = \sqrt{(x^2-4)^3}$

7) $f(x) =(4x-1)^2(6-x)^3$ 8) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x} + x^2}$ 9) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2x+1}}{(x-2)^2}$

10) $f(x) = (5x^2-3x+5)^6$ 11)$f(x) = e^{-3x+1}$ 12)$f(x) = x\ln|x-1|$

13) $f(x) = \dfrac{\ln x^2}{x}$ 14) $f(x) = (x+\ln x)^5$ 15) $f(x) = \ln(\ln x)$

16) $f(x) = 2^x$ 17) $f(x) = xe^{1/x}$ 18) $f(x) = \ln\frac{|(2x-1)(1-x)|}{|3x+1|}$

19) $f(x) = x^x$ 20) $f(x) = 3^x x^3$

Exercice 8

1) Donner les dérivées successives des fonctions suivantes :

$f : x \rightarrow x^n$ ($n \in \mathbb{N}$ paramètre).

$g : x \rightarrow (ax + b)^n$ ($a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}$ paramètres).

$h : x \rightarrow e^{ax}$ ($a \in \mathbb{R}^*$ paramètre)

2) Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\ell : x \rightarrow \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.

Exercice 9. Une production mesurée par Q est liée à un facteur de production a, qui est lui-même lié à un autre facteur de production $b \geq 0$.

On donne $Q = \sqrt[3]{a^2}$ et $a = \frac{1}{b^3 - 2b^2 + 3b + 1}$.

Sachant que la **production marginale** est définie par la dérivée de la fonction de production Q, calculer cette production marginale en fonction de b.

Exercice 10. Soit $f: x \rightarrow \frac{4}{x^2} + 1$. Déterminer deux ensemble **A** et **B** tels que f soit une bijection de **A** vers **B**. Déterminer f^{-1} et $(f^{-1})'$ en précisant l'ensemble de dérivabilité.

Exercice 11. Calculer les dérivées à droite et à gauche de la fonction f en x_0, et dire si elle est dérivable en ce point.

$f : x \rightarrow |x^2 + x - 2| + |x + 1|$ en $x_0 = -2$, -1 et 1.

Exercice 12. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x^2 \ln x}{x+1} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

. Faire un dessin au voisinage de l'origine.

Exercice 13. Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = (x-1)\ln(\frac{x-1}{x}) \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$ et C(f) sa représentation graphique. Déterminer l'ensemble de définition de f . f est-elle continue en 1 (justifier). Etudier la dérivabilité de f en 1. Que peut-on en déduire quant à C(f) ? Faire un dessin au voisinage de (1,0)

Indications

Exercice 3 : Chercher le coefficient directeur de (PQ).

Exercice 4 : Ecrire que les points solutions appartiennent à la fois à $\mathscr{P}$ et à $\mathscr{D}_m$ et égaler les coefficients directeurs adequats.

Exercice 6 : 1) Reconnaître en $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x}$ un nombre dérivé.

2) Par un changement de variable remarquer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} = \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\ln(X + 1)}{X}$ et reconnaître ici encore un nombre dérivé.