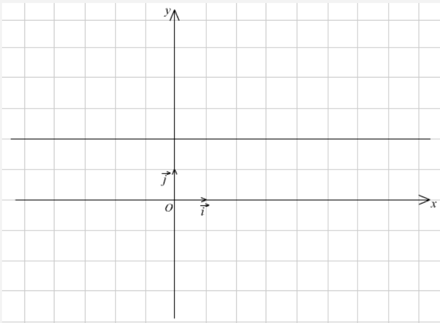
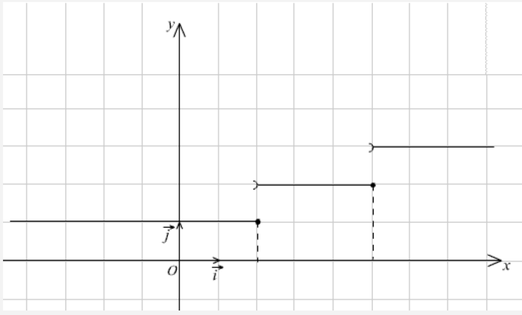
Leçon 04 – Correction des exercices

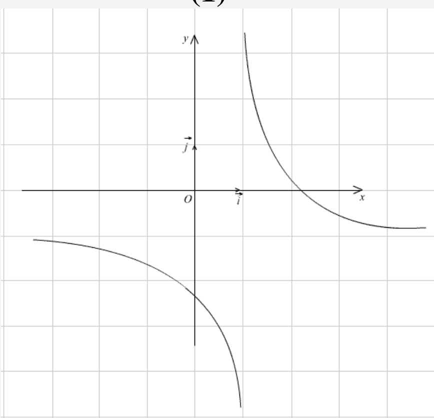
Exercice 1. Pour chacune des représentations graphiques de la fonction f suivantes, préciser l'ensemble de définition de f, les réels où f est continue et l'ensemble de dérivabilité de f.



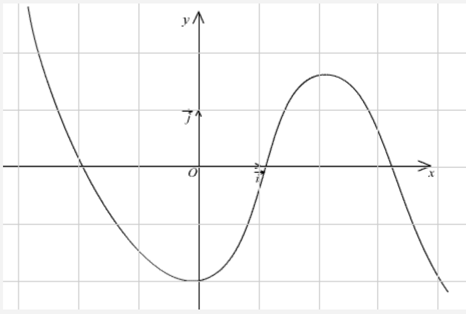
(1)



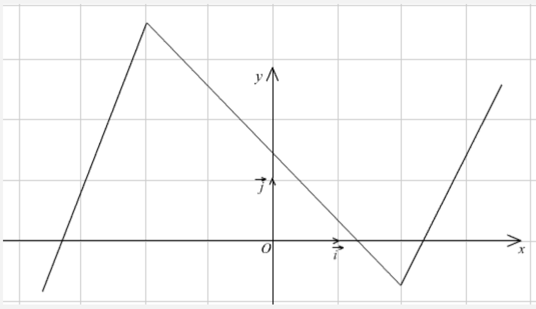
(2)



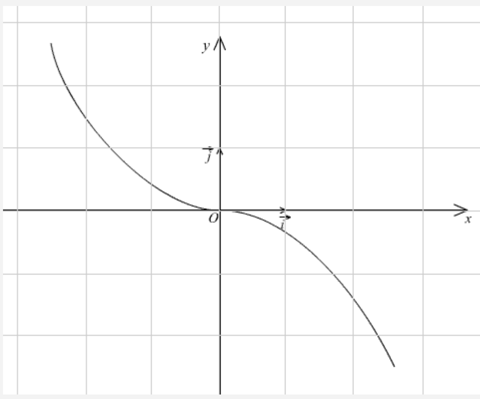
(3)



(4)



(5)



(6)

Solution

(1) f est définie, continue et dérivable sur **R** (f est constante et égale à 2).
(2) f est définie sur **R**, continue sur **R**\{2 ; 5}et dérivable sur
]-∞ ; 2[∪]2 ; 5[∪]5 ; +∞[.
(3) f est définie, continue et dérivable sur **R**\{1} =]-∞ ; 1[∪]1 ; +∞[.
(4) f est définie, continue et dérivable sur **R**.

(5) f est définie et continue sur **R** et f est dérivable sur $]-\infty ; -2[\cup]-2 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$.
(6) f est définie, continue et dérivable sur **R**.
(7) f est définie et continue sur **R** et dérivable sur $]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$.

Exercice 2. Soit $f : t \to |t + 1| + |t - 3|$ et $g : a \to E(2a - 1) + 2$ pour $a\in [-1 ; 2]$.

E(a) désigne la partie entière de a, c'est à dire l'entier immédiatement inférieur ou égal à a :
$E(a) \leq a < E(a) + 1$ $E(a)\in$ **N**.

1) Faire une représentation graphique de chacune des fonctions f et g.
2) Préciser leur ensemble de définition, les points où elles sont continues et leur ensemble de dérivabilité.

Solution

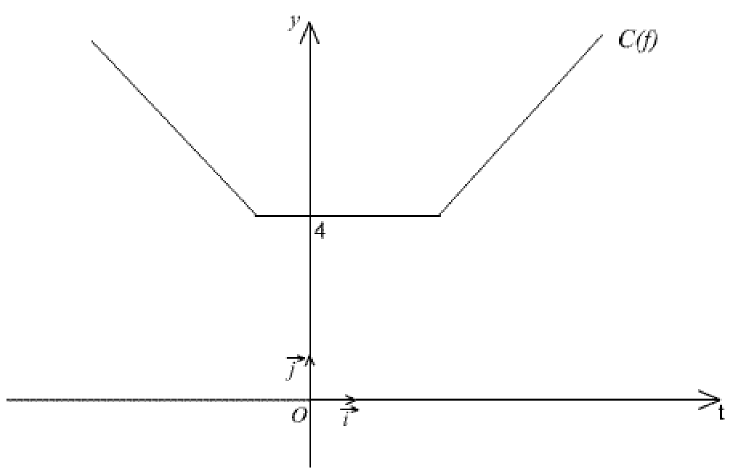
1) Pour faire une représentation graphique de f, il faut d'abord exprimer f sans valeurs absolues. Pour cela, le plus simple est de faire un tableau.
On utilise la propriété suivante :

$$|A(x)| = A(x) \text{ si et seulement si } A(x) \geq 0 \text{ et}$$
$$|A(x)| = -A(x) \text{ si et seulement si } A(x) \leq 0$$

par exemple $|t + 1| = t + 1$ pour $t \geq -1$ et $|t + 1| = -t - 1$ pour $t \leq -1$.

t	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$\|t+1\|$		$-t-1$		$t+1$		$t+1$	
$\|t-3\|$		$-t+3$		$-t+3$		$t-3$	
$f(t)$		$-2t+2$	4	4	4	$2t-2$	

D'où la représentation graphique



Pour faire la représentation graphique de g, on peut remarquer que
$g(-1) = E(-3) + 2 = -3 + 2 = -1$.
Si a augmente, tant que $2a – 1$ sera inférieur à $–2$, g ne changera pas de valeur.
Donc pour $a\in [-1 ; -\frac{1}{2} [$, $g(a) = -1$.

De même $g(-\frac{1}{2}) = E(-2) + 2 = 0$ et tant que $2a - 1$ sera inférieur à -1, g ne changera pas de valeur.

Donc pour $a\in [-\frac{1}{2} ; 0[$, $g(a) = 0$. Et ainsi de suite :

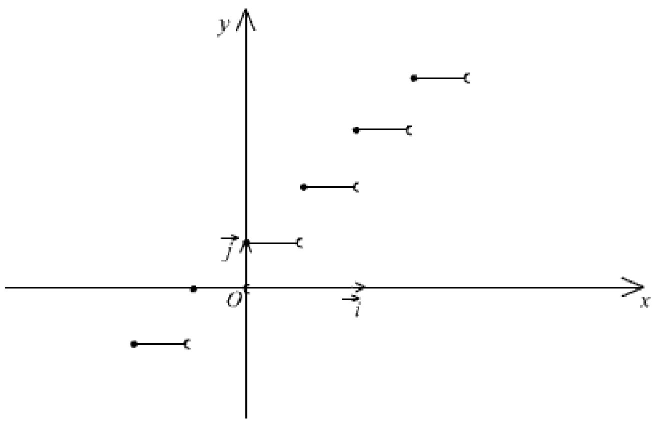
pour $a\in [0 ; \frac{1}{2} [$, $g(a) = 1$,

pour $a\in [\frac{1}{2} ; 1[$, $g(a) = 2$,

pour $a\in [1 ; \frac{3}{2} [$, $g(a) = 3$,

pour $a\in [\frac{3}{2} ; 2[$, $g(a) = 4$ et $g(2) = 5$.

D'où la représentation graphique :



2) f est définie sur **R** et d'après la représentation graphique f est continue sur **R**. Mais C(f) n'admettant pas de tangente aux points d'abscisses –1 et 3, elle n'est pas dérivable en –1 et 3. Ailleurs, il n'y a pas de problème puisque f est affine sur des intervalles ouverts. L'ensemble de dérivabilité de f est $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 3[\cup]3 ; +\infty[$.

g est définie sur $[-1 ; 2]$ et d'après la représentation graphique g est continue sur $\mathbf{R}\backslash\{-\frac{1}{2} ; 0 ; \frac{1}{2} ; 1 ; \frac{3}{2} ; 2\}$. g ne peut être dérivable en un point de discontinuité et en –1, puisque –1 n'est pas dans un intervalle ouvert contenu dans D(f). Ailleurs il n'y a pas de problème puisque g est constante sur des intervalles ouverts.

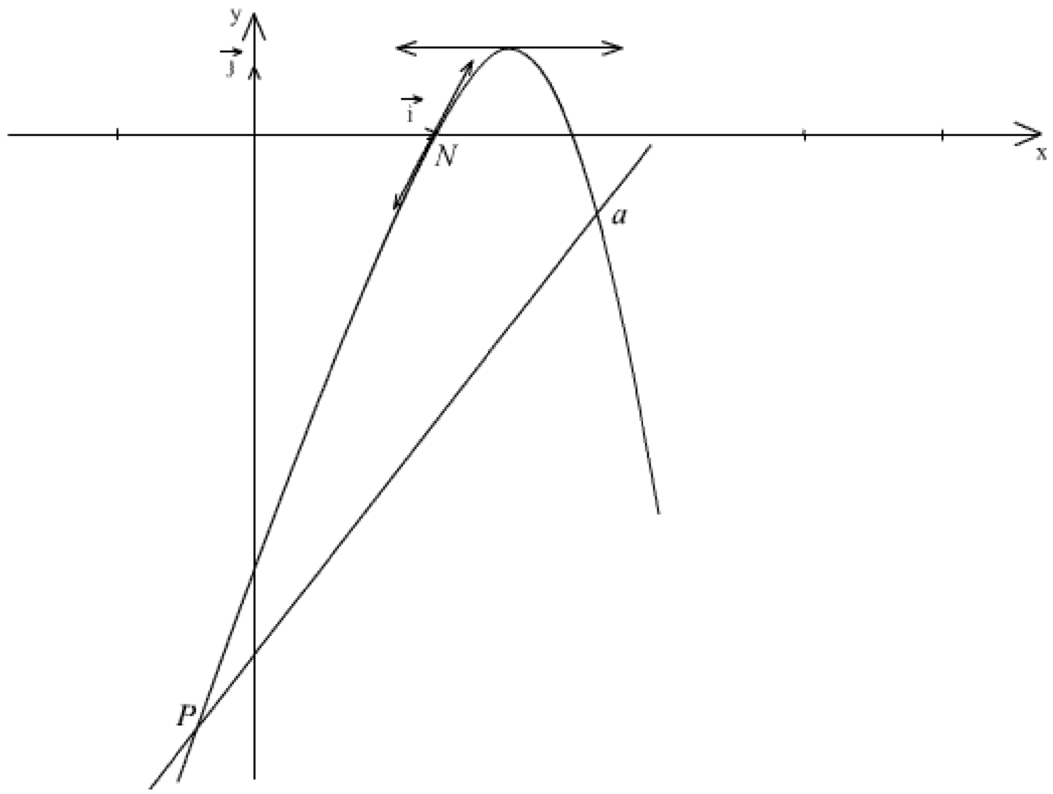
Donc g est dérivable sur $\mathbf{R}\backslash\{-1 ; -\frac{1}{2} ; 0 ; \frac{1}{2} ; 1 ; \frac{3}{2} ; 2\}$

(c'est une réunion d'intervalles ouverts : $] -1 ; -\frac{1}{2} [\cup]-\frac{1}{2} ; 0[\cup]0 ; \frac{1}{2} [$ ….).

Exercice 3. Soit $f : x \to -2x^3 + 12x – 10$.
P et Q sont les points de C(f) d'abscisse respective –1 et 2.
Trouver les points de C(f) où la tangente est parallèle à (PQ).

Solution

Le coefficient directeur de la tangente **T** à C(f) en M(x,f(x)) est f'(x) puisque f est dérivable sur **R**. Donc **T** et (PQ) seront parallèles si et seulement si f'(x) et le coefficient directeur de (PQ) sont égaux.
P a pour coordonnées (-1 ; -20) et Q a pour coordonnées (2 ; -2). Le coefficient directeur de (PQ) est donc $\frac{(-2) - (-20)}{2 - (-1)} = 6$. Les abscisses x des points cherchés vérifient donc f'(x) = 6, soit $-6x^2 + 12 = 6$. D'où x = 1 ou –1, et les points de C(f) où la tangente est parallèle à (PQ) sont P(-1 ; -20) et N(1 ; 0). On remarque ici que (PQ) est la tangente à C(f) en P.



Exercice 4. Considérons la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = -2x^2 + 3x + 1$ et la droite $\mathscr{D}_m$ d'équation y = mx + 9, où m est un paramètre réel.
Déterminer les points de $\mathscr{P}$ où la droite $\mathscr{D}_m$ est tangente à $\mathscr{P}$ (on donnera les valeurs du paramètre correspondantes).

Solution

$\mathscr{D}_m$ est tangente à $\mathscr{P}$ en M(x,y) si et seulement si $\begin{cases} y = mx + 9 \\ y = -2x^2 + 3x + 1 \\ m = f'(x) \end{cases}$ soit

$\begin{cases} (-4x + 3)x + 9 = -2x^2 + 3x + 1 \\ y = mx + 9 \\ m = f'(x) \end{cases}$. On obtient $\begin{cases} x^2 = 4 \\ m = f'(x) \end{cases}$, c'est à dire $\begin{cases} x = \pm 2 \\ m = f'(x) \end{cases}$. Les deux points cherchés sont donc A(-2 ; -13) et B(2 ; -1), ils correspondent respectivement aux valeurs m = f'(-2) = 11 et m = f'(2) = -5.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par : $x \rightarrow \dfrac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3}$.

1) Etudier la position de C(f) part rapport à la tangente en A(1,2).
2) Déterminer le point B de C(f) où la tangente est parallèle à la droite δ d'équation y = x-1.
3) Déterminer les points d'intersection de C(f) avec (Ox) et les tangentes à C(f) en ces points.
4) Déterminer la tangente à C(f) en D(-3,-10/3), puis étudier la position de C(f) par rapport cette tangente au voisinage de D.

Solution

1) En A(1,2) la tangente à C(f) a pour coefficient directeur f'(1).
Calcul de f'(x) :

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 2x + 3)(x^2 + 3) - 2x(x^3 - x^2 + 3x + 5)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{x^4 + 6x^2 - 16x + 9}{(x^2 + 3)^2} \text{ et } f'(1) = 0.$$

En A la tangente à C(f) est donc horizontale et a pour équation y = 2.

Etudions la position de C(f), d'équation $y = \dfrac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3}$ par rapport à la tangente **T** à C(f) en A, d'équation y = 2. Si M et m sont les points respectifs de C(f) et de **T** d'abscisse x, ils sont l'un au dessus de l'autre, il s'agit de savoir lequel est au dessus. En étudiant le signe de la différence de leur ordonnée, on aura la réponse.

L'ordonnée de M est $y_M = \dfrac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3}$ et celle de m est $y_m = 2$.

$$y_M - y_m = \frac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3} - 2 = \frac{(x-1)^3}{x^2+3} .$$

Donc si x > 1, $y_M - y_m > 0$ et C(f) est au dessus de **T**. Et si x < 1, $y_M - y_m < 0$ et C(f) est en dessous de **T**.
On dit que A est un point d'inflexion (C(f) traverse la tangente), cette notion sera introduite dans la leçon 6.

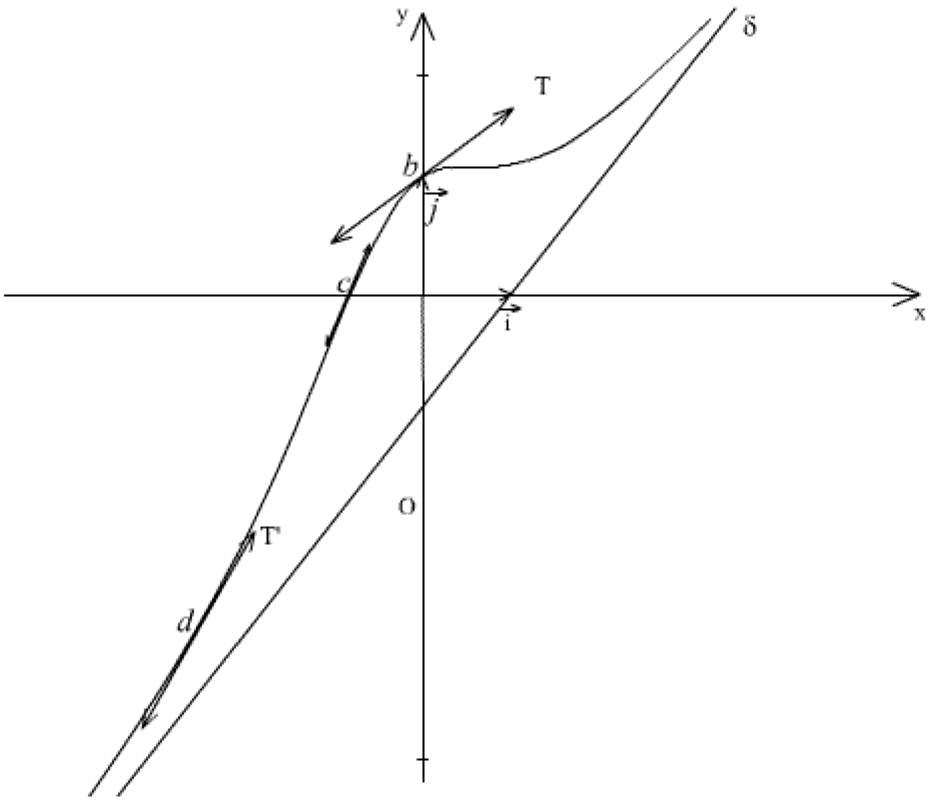
2) Déterminons $B(x_0,f(x_0))$ où la tangente est parallèle à δ.
B existe si et seulement si $f'(x_0) = 1$ (on égalise les coefficients directeurs des 2 droites).
Soit $x_0^4 + 6x_0^3 - 16x_0 + 9 = x_0^4 + 6x_0^2 + 9$. La seule solution est $x_0 = 0$.
Il existe donc un seul point B solution c'est B(0,5/3).

3) C d'abscisse x_0 est un point d'intersection de C(f) et de (Ox) si et seulement si $f(x_0) = 0$, c'est à dire $x_0^3 - x_0^2 + 3x_0 + 5 = 0$. La précédente équation équivaut à $(x_0 + 1)(x_0^2 - 2x_0 + 5) = 0$. Il n'y a donc qu'une solution: $x_0 = -1$ et C(-1,0) est le seul point d'intersection de C(f) et de (Ox).

D'autre part f'(-1) = 2. La tangente à C(f) en C a donc pour équation : y = 2(x+1)

4) f'(-3) = 4/3, la tangente **T'** à C(f) en D a donc pour équation :
$y = \dfrac{4}{3}(x + 3) - \dfrac{10}{3}$. Etudions la position de C(f) par rapport à **T'**:

$f(x) - \dfrac{4}{3}(x + 3) = \dfrac{(x+3)^2(1-x)}{3(x^2+3)}$. Donc au voisinage de –3, $f(x) - \dfrac{4}{3}(x + 3) \geq 0$ et C(f) est au dessus de **T'**.



Exercice 6. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}.$$

Solution

La fonction f est évidemment continue sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$, le problème se pose en 0.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+1) - \ln(0^2+1)}{x - 0}$, c'est le nombre dérivé de $x \to \ln(x^2 + 1)$ en 0. Or cette fonction est dérivable sur **R** et y admet pour dérivée $x \to \dfrac{2x}{x^2+1}$, le nombre dérivé en 0 est donc 0. Et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$; f est bien continue en 0.

De même d'après les théorèmes sur la dérivation, f est dérivable sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$, le problème se pose en 0. Cherchons si le nombre dérivé de f en 0 existe :

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(X+1)}{X}$ (en posant $X = x^2$ et en remarquant que $x\to 0$ si et seulement si $X\to 0$). Or $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(X+1)}{X} = 1$ (c'est le nombre dérivé de $X\to \ln(X + 1)$ en 0). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ et f admet donc un nombre dérivé en 0 qui vaut 1. f est dérivable en 0 et C(f) admet pour tangente à l'origine la droite d'équation y = x.

Exercice 7. Calculer les fonctions dérivées de f dans les cas suivants, après avoir précisé l'ensemble de dérivabilité.

1) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-2)^2}$	2) $f(x) = \sqrt{2-3x}$	3)$f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x+1}}$
4) $f(x) = \sqrt{x^2}$	5) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x-1}}$	6) $f(x) = \sqrt{(x^2-4)^3}$
7) $f(x) =(4x-1)^2(6-x)^3$	8) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x} + x^2}$	9) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2x+1}}{(x-2)^2}$
10) $f(x) = (5x^2-3x+5)^6$	11)$f(x) = e^{-3x+1}$	12)$f(x) = x\ln\|x-1\|$
13) $f(x) = \dfrac{\ln x^2}{x}$	14) $f(x) = (x+\ln x)^5$	15) $f(x) = \ln(\ln x)$
16) $f(x) = 2^x$	17) $f(x) = xe^{1/x}$	18) $f(x) = \ln\dfrac{\|(2x-1)(1-x)\|}{\|3x+1\|}$
19) $f(x) = x^x$	20) $f(x) = 3^x x^3$	

Solution

1) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 - 2)^2} = (x^2 - 2)^{-2}$

$D'(f) = \mathbf{R}\backslash\{-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}\ \}$ et $f'(x) = -2(x^2 - 2)^{-3} \times 2x = \dfrac{-4x}{(x^2 - 2)^3}$.

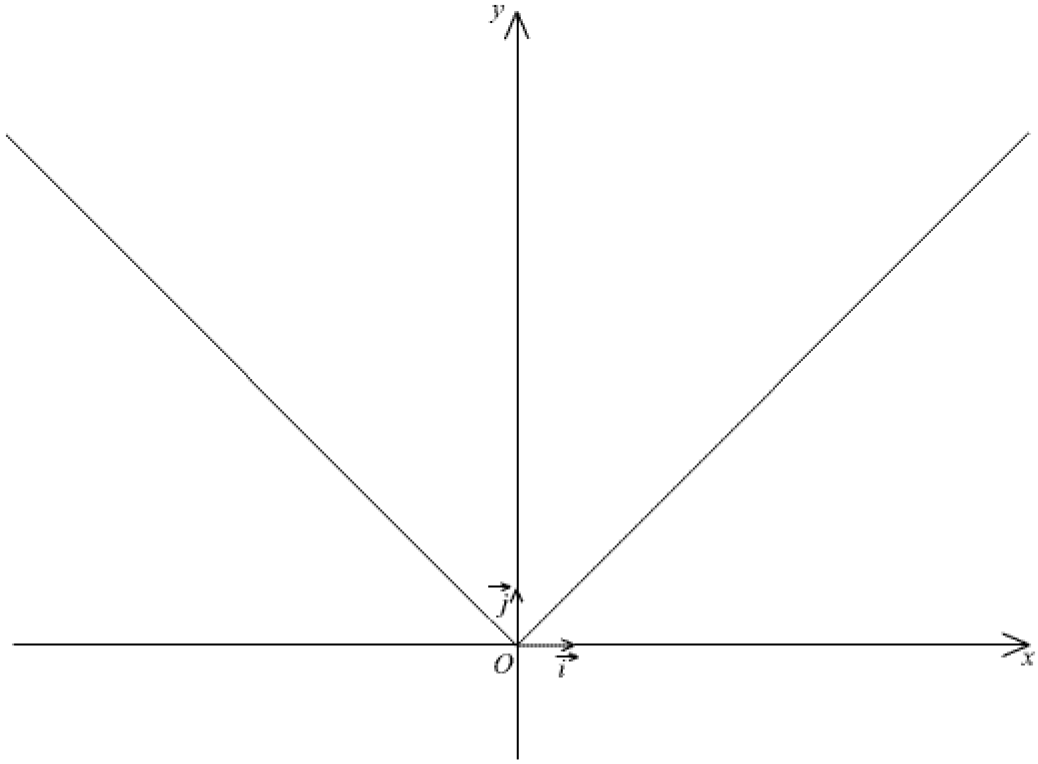
2) $f(x) = \sqrt{2 - 3x} = (2 - 3x)^{1/2}$

$D'(f) =]-\infty\ ;\ \dfrac{3}{2}\ [$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2}(2 - 3x)^{-1/2} \times (-3) = \dfrac{-3}{2\sqrt{2 - 3x}}$.

3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}} = (x + 1)^{-1/2}$

$D'(f) =]-1\ ;\ +\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{2}(x + 2)^{-3/2} = \dfrac{-1}{2\sqrt{(x + 1)^3}}$.

4) $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$



D’(f) = $]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$.
Sur $]-\infty\ ;\ 0[$, f(x) = -x et f’(x) = -1.
Sur $]0\ ;\ +\infty[$, f(x) = x et f’(x) = 1.

5) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x - 1}} = (x - 1)^{-1/5}$.

D’(f) = $]1\ ;\ +\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{5}(x - 1)^{-6/5} = \dfrac{-1}{5\sqrt[5]{(x - 1)^6}}$.

6) $f(x) = \sqrt{(x^2 - 4)^3} = (x^2 - 4)^{3/2}$.

D’(f) = $\{x\ /\ x^2 - 4 \geq 0\} =]-\infty\ ;\ -2]\cup[2\ ;\ +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{3}{2}(x^2 - 4)^{1/2} \times 2x = 3x\sqrt{x^2 - 4}$.

7) $f(x) = (4x - 1)^2(6 - x)^3$.
D’(f) = **R** et $f'(x) = 2(4x - 1) \times 4 \times (6 - x)^3 + (4x - 1)^2 \times 3\ \ (6 - x)^2 \times (-1)$
$f'(x) = 8(4x - 1)(6 - x)^3 - 3(4x - 1)^2(6 - x)^2$.

8) $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x} + x^2}$.

D’(f) = $]0\ ;\ +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x} + x^2 - (x + 1)(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x)}{(\sqrt{x} + x^2)^2} = \dfrac{x - 2x^2\sqrt{x} - 1 - 4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + x^2)^2}$.

9) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{(x - 2)^2} = \dfrac{|x + 1|}{(x - 2)^2}$.

D’(f) = **R**\{-1 ; 2} et si x < 1 |x + 1| = -x – 1 et $f(x) = \dfrac{-x - 1}{(x - 2)^2}$, alors

$f'(x) = \dfrac{-(x-2)^2 + (x+1) \times 2 \times (x-2)}{(x-2)^4} = \dfrac{x+4}{(x-2)^3}$.

Si $x > 1$ $|x+1| = x+1$ et $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-2)^2}$, alors

$f'(x) = \dfrac{(x-2)^2 - (x+1) \times 2 \times (x-2)}{(x-2)^4} = \dfrac{-x-4}{(x-2)^3}$.

10) $f(x) = (5x^2 - 3x + 5)^6$.
$D'(f) = \mathbf{R}$ et $f'(x) = 6(5x^2 - 3x + 5)^5 \times (10x - 3) = (60x - 18)\,(5x^2 - 3x + 5)^5$.

11) $f(x) = e^{-3x+1}$.
$D'(f) = \mathbf{R}$ et $f'(x) = -3\,e^{-3x+1}$.

12) $f(x) = x\ln|x-1|$.

$D'(f) = \mathbf{R}\backslash\{1\}$ et $f'(x) = \ln|x-1| + \dfrac{x}{x-1}$.

13) $f(x) = \dfrac{\ln x^2}{x} = \dfrac{2\ln|x|}{x}$.

$D'(f) = \mathbf{R}^*$ et $f'(x) = \dfrac{2 - 2\ln|x|}{x^2}$.

14) $f(x) = (x + \ln x)^5$.

$D'(f) =]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = 5(x + \ln x)^4 \times (1 + \dfrac{1}{x})$

15) $f(x) = \ln(\ln x)$.

$D'(f) = \{x \,/\, \ln x > 0\} =]1\,;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \dfrac{1}{x\ln x}$.

16) $f(x) = 2^x$, $f(x)$ s'écrit $e^{x\ln 2}$
$D'(f) = \mathbf{R}$ et $f'(x) = e^{x\ln 2} \times \ln 2 = (\ln 2)2^x$

17) $f(x) = xe^{1/x}$.

$D'(f) = \mathbf{R}^*$ et $f'(x) = e^{1/x} - \dfrac{x}{x^2}\,e^{1/x} = e^{1/x}(1 - \dfrac{1}{x})$.

18) $f(x) = \ln\dfrac{|(2x-1)(1-x)|}{|3x+1|} = \ln|2x-1| + \ln|1-x| - \ln|3x+1|$.

$D'(f) = \mathbf{R}\backslash\{-\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{2}\,;1\}$ et $f'(x) = \dfrac{2}{2x-1} - \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{3x+1}$.

19) $f(x) = x^x = e^{x\ln x}$.
$D'(f) =]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = e^{x\ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$.

20) $f(x) = 3^x x^3$, $f(x)$ s'écrit $(e^{x\ln 3})x^3$
$D'(f) = \mathbf{R}$ et $f'(x) = (e^{x\ln 3} \times \ln 3)x^3 + (e^{x\ln 3})(3x^2) = (\ln 3)3^x x^3 + 3^x(3x^2)$
$f'(x) = (\ln 3)3^x x^3 + 3^{x+1}x^2$

Exercice 8
1) Donner les dérivées successives des fonctions suivantes :
$f : x \to x^n$ ($n \in \mathbb{N}$ paramètre).
$g : x \to (ax + b)^n$ ($a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}$ paramètres).
$h : x \to e^{ax}$ ($a \in \mathbb{R}^*$ paramètre)
2) Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\ell : x \to \dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.

Solution

1) Pour tout réel x,
$f'(x) = nx^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ … $f^{(p)}(x) = n(n-1)\ldots(n-p+1)x^{n-p}$ si $p \leq n$,
$f^{(n)}(x) = n\,!$ *(notation : $n\,! = n(n-1)(n-2)\ldots3\times2\times1$)* et si $p > n$, $f^{(p)}(x) = 0$.

$g'(x) = a(ax + b)^{n-1}$, $g''(x) = a^2\, n(n-1)(ax + b)^{n-2}$ … …
$g^{(p)}(x) = a^p\, n(n-1)\ldots(n-p+1)(ax + b)^{n-p}$ si $p \leq n$
$g^{(n)}(x) = a^p\, n\,!$ et si $p > n$, $g^{(p)}(x) = 0$.

$h'(x) = ae^{ax}$, $h''(x) = a^2 e^{ax}$ …..$h^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$.

2) Pour tout réel $x \neq 0$
$\ell'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $\ell''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, $\ell^{(3)}(x) = -\dfrac{3}{x^4}$ et en itérant $\ell^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n}{x^{n+1}}$ (on peut aussi vérifier ce résultat par un raisonnement par récurrence).

Exercice 9. Une production mesurée par Q est liée à un facteur de production a, qui est lui-même lié à un autre facteur de production $b \geq 0$.
On donne $Q = \sqrt[3]{a^2}$ et $a = \dfrac{1}{b^3 - 2b^2 + 3b + 1}$.
Sachant que la **production marginale** est définie par la dérivée de la fonction de production Q, calculer cette production marginale en fonction de b.

Solution

En utilisant la formule des dérivées de fonctions composées, pour tout $b \geq 0$:
$$\frac{dQ}{db} = \frac{d(a^{2/3})}{da}\times\frac{da}{db} = (a^{2/3})' \times \left(\frac{1}{b^3 - 2b^2 + 3b + 1}\right)' = \frac{2}{3}\, a^{-1/3} \times \frac{-(3b^2 - 4b + 3)}{(b^3 - 2b^2 + 3b + 1)^2}.$$
Soit $$\frac{dQ}{db} = -\frac{2}{3}\,\frac{(3b^2 - 4b + 3)\sqrt[3]{b^3 - 2b^2 + 3b + 1}}{(b^3 - 2b^2 + 3b + 1)^2}.$$
(En effet pour tout $b \geq 0$, a et $a^{2/3}$ sont dérivables car $b^3 - 2b^2 + 3b + 1 > 0$. D'autre part $a^{-1/3} = \sqrt[3]{b^3 - 2b^2 + 3b + 1}$).

Exercice 10. Soit $f: x \to \dfrac{4}{x^2} + 1$. Déterminer deux ensemble **A** et **B** tels que f soit une bijection de **A** vers **B**. Déterminer f^{-1} et $(f^{-1})'$ en précisant l'ensemble de dérivabilité.

Solution

Résolvons l'équation $y = \frac{4}{x^2} + 1$ où y est un réel donné et x l'inconnue.
L'équation équivaut à $yx^2 = 4 + x^2$ (en effet $x = 0$ n'est pas solution), soit
$x^2(y - 1) = 4$. Si $y = 1$, il n'y a pas de solution (l'équation s'écrit $0 = 4$) si $y \neq 1$, on a $x^2 = \frac{4}{y-1}$,
ce qui n'est possible que si $y > 1$ (car $x^2 \geq 0$). Dans ce cas,
$x = \pm\sqrt{\frac{4}{y-1}} = \pm\frac{2}{\sqrt{y-1}}$ et il y a deux solutions opposées f n'est donc pas une bijection si $x \in \mathbf{R}^*$ ou si $y \leq 1$.
Par contre si $x \in \mathbf{R}^{+*}$ et si $y > 1$, $x = \frac{2}{\sqrt{y-1}}$ et f est une bijection de $\mathbf{R}^{+*}$ dans $]1,+\infty[$.

Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} de $]1 , +\infty[$ dans $\mathbf{R}^{+*}$: $y \rightarrow \frac{2}{\sqrt{y-1}}$ qui est dérivable sur $]1,+\infty[$ puisque f l'est sur $\mathbf{R}^{+*}$ et que f' est non nulle.

$$f'(x) = -\frac{8}{x^3} \quad \text{donc} \quad {f^{-1}}'(y) = \frac{1}{-\frac{8}{x^3}} = -\frac{x^3}{8} = -\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{y-1}}\right)^3}{8} = -\frac{1}{(y-1)\sqrt{y-1}} .$$

Exercice 11. Calculer les dérivées à droite et à gauche de la fonction f en x_0, et dire si elle est dérivable en ce point.
$f : x \rightarrow |x^2 + x - 2| + |x + 1|$ en $x_0 = -2 , -1$ et 1.

Solution

Avant de calculer ces nombres dérivés, exprimons f(x) sans valeurs absolues suivant les valeurs de x et réunissons tous ces résultats en un tableau.
Remarquons d'abord que $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$ et que
$x^2 + x - 2 \geq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty ; -2] \cup [1 ; +\infty[$ et $x^2 + x - 2 \leq 0$ si et seulement si $x \in [-2 ; 1]$.

x	$-\infty$ … -2	-2 … -1	-1 … 1	1 … $+\infty$
$\lvert x^2+x-2\rvert$	x^2+x-2	$-x^2-x+2$	$-x^2-x+2$	x^2+x-2
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$f(x)$	x^2-3	$-x^2-2x+1$	$-x^2+3$	x^2+2x-1
	1	2	2	

Nombre dérivé à droite en -2 : $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim\limits_{x\to -2^+} \frac{(-x^2 - 2x + 1) - 1}{x + 2} = \lim\limits_{x\to -2^+} \frac{-x(x + 2)}{x + 2}$
$= \lim\limits_{x\to -2^+} -x = 2 = f'_d(-2)$.

Nombre dérivé à gauche en -2 : $\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim\limits_{x\to -2^-} \frac{(x^2 - 3) - 1}{x + 2} = \lim\limits_{x\to -2^-} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} =$

$\lim\limits_{x \to -2^-} x - 2 = -4 = f'_g(-2)$.

f admet donc des nombres dérivés à droite et à gauche en –2, mais ces nombres dérivés sont différents, f n'est donc pas dérivable en –2. Par contre C(f) admet des demi-tangentes à droite et à gauche en (-2 ; 1), de coefficients directeurs respectifs 2 et –4.

Nombre dérivé à droite de –1 : $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{(-x^2 + 3) - 2}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{(1 - x)(x + 1)}{x + 1} =$

$\lim\limits_{x \to -1^+} 1 - x = 2 = f'_d(-1)$.

Nombre dérivé à gauche de –1 : $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{(-x^2 - 2x + 1) - 2}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{-(x + 1)^2}{x + 1} =$

$\lim\limits_{x \to -1^-} - x - 1 = 0 = f'_g(-1)$.

f admet donc des nombres dérivés à droite et à gauche en –1, mais ces nombres dérivés sont différents, f n'est donc pas dérivable en –1. Par contre C(f) admet des demi-tangentes à droite et à gauche en (-1 ; 2), de coefficients directeurs respectifs 2 et 0.

Nombre dérivé à droite de 1 : $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{(x^2 + 2x - 1) - 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{(x + 3)(x - 1)}{x - 1} =$

$\lim\limits_{x \to 1^+} x + 3 = 4 = f'_d(1)$.

Nombre dérivé à droite de 1 : $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{(-x^2 + 3) - 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{(-1 - x)(x - 1)}{x - 1} =$

$\lim\limits_{x \to 1^-} - x - 1 = -2 = f'_g(1)$.

f admet donc des nombres dérivés à droite et à gauche en 1, mais ces nombres dérivés sont différents, f n'est donc pas dérivable en 1. Par contre C(f) admet des demi-tangentes à droite et à gauche en (1 ; 2), de coefficients directeurs respectifs 4 et -2.

Exercice 12. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie par

$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2 \ln x}{x+1} \text{ si } x > 0 \end{cases}$. Faire un dessin au voisinage de l'origine.

Solution

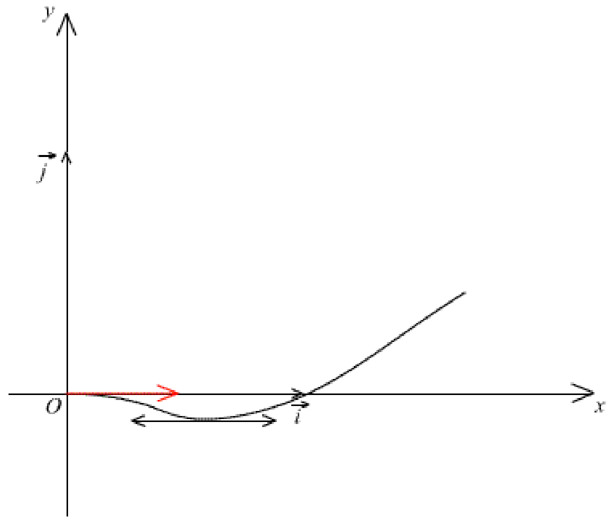
f est définie sur $\mathbf{R}^+$ et est évidemment continue sur]0 ; +∞[, le problème se pose à droite de 0.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 \ln x}{x + 1} = 0$ (toute puissance de x « l'emporte sur son logarithme » en 0)

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$, f est donc continue à droite de 0.

f est dérivable sur]0 ; +∞[, d'après les théorèmes du cours, là encore le problème se pose à droite de 0.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 \ln x}{x(x + 1)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x \ln x}{(x + 1)} = 0$. f est donc dérivable à droite de 0, et C(f) admet à droite de l'origine, une demi-tangente horizontale.



Exercice 13. Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = (x-1)\ln(\frac{x-1}{x}) & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$ et C(f) sa représentation graphique. Déterminer l'ensemble de définition de f . f est-elle continue en 1 (justifier). Etudier la dérivabilité de f en 1. Que peut-on en déduire quant à C(f) ? Faire un dessin au voisinage de (1,0)

Solution

f est définie en 1 et pour $x \neq 0$ et pour $\frac{x - 1}{x} > 0$. D'où D(f) = $]-\infty ; 0[\cup[1 ; +\infty[$.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x - 1)\ln(\frac{x - 1}{x}) = \lim_{x\to 1^+} (x - 1)\ln(x - 1) - (x - 1)\ln x = 0 = f(1).$$

(x - 1 « l'emporte sur son logarithme » en 1)

f est donc continue à droite en 0.

Etudions la dérivabilité de f à droite de 1 :

$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x - 1)\ln(\frac{x - 1}{x})}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \ln(\frac{x - 1}{x}) = +\infty$. f n'est donc pas dérivable à droite de 1, mais C(f) admet une demi-tangente verticale à droite de (1,0).