Leçon 04 - Correction des "exercez-vous"

Exercez-vous 5 :

1) On reprend la fonction f de l'exercez-vous **1**. En remarquant que $f(x) = (x + 1)^2 – 2$ (forme canonique), déterminer des ensembles **A** et **B** tels que f soit une bijection de **A** sur **B**. Déterminer alors f^{-1} et sa dérivée à l'aide de la formule du cours, puis directement $(f^{-1})'$ à partir de la forme de f^{-1}.

2) On reprend la fonction g de l'exercez-vous **1**. Déterminer des ensembles **A** et **B** tels que g soit une bijection de **A** sur **B**. Déterminer alors g^{-1} et sa dérivée à l'aide de la formule du cours, puis directement $(g^{-1})'$ à partir de la forme de g^{-1}.

3) On reprend la fonction k de l'exercez-vous **1**. Déterminer des ensembles **A** et **B** tels que k soit une bijection de **A** sur **B**. Déterminer alors k^{-1} et sa dérivée à l'aide de la formule du cours, puis directement $(k^{-1})'$ à partir de la forme de k^{-1}.

Solution

1) Considérons donc l'équation $y = (x + 1)^2 - 2$, où x est l'inconnue et y un paramètre. Cette équation s'écrit $(x + 1)^2 = y + 2$ (1).
Ainsi (1) n'a pas de solution si $y < -2$, puisqu'un crré est toujours positif ou nul.
Si $y \geq -2$, (1) équivaut à $x + 1 = \pm\sqrt{y+2}$. Pour $y \geq -2$,(1) a donc deux solutions sur **R**. f n'est donc pas une bijection si $x \in \mathbf{R}$.
Par contre si on se restreint à $x + 1 \geq 0$ (ou $x + 1 \leq 0$), (1) a une et une seule solution.
f est donc une bijection de $[-1 ; +\infty[$ (ou $]-\infty ; -1]$) sur $[-2 ; +\infty[$.
Choisissons **A** = $[-1 ; +\infty[$ et **B** = $[-2 ; +\infty[$, alors

$$f : [-1 ; +\infty[\to [-2 ; +\infty[$$
$$x \to x^2 + 2x – 1 = y$$

et $x = -1 + \sqrt{y+2}$.
f^{-1} est alors définie par

$$f^{-1} : [-2 ; +\infty[\to [-1 ; +\infty[$$
$$y \to -1 + \sqrt{y+2} .$$

D'après le cours f est dérivable pour $2(-1 + \sqrt{y+2}\,) + 2 = \sqrt{y+2}$ non nul (effet $f'(x) = 2x + 2$). f^{-1} est donc dérivable sur $]-2 ; +\infty[$, et f^{-1} a pour dérivée $\dfrac{1}{2\sqrt{y+2}}$.
En dérivant directement f^{-1} comme une fonction composée :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y+2}} \times 1 = \frac{1}{2\sqrt{y+2}} .$$

On écrira plutôt $f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x+2}$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$.

2) Résolvons l'équation (2) : $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ avec $x \neq 1$, inconnue et y paramètre.
(2) équivaut à $y(x – 1) = 2x + 1$, soit $x(y – 2) = y + 1$. (2) n'a pas de solution pour $y = 2$.

Si $y \neq 2$, (2) a une et une seule solution $x = \frac{y + 1}{y - 2}$.

g est alors une bijection de $\mathbf{A} = \mathbf{R}\backslash\{1\}$ sur $\mathbf{B} = \mathbf{R}\backslash\{2\}$.

Et g^{-1} est définie par : $g^{-1} : \mathbf{R}\backslash\{2\} \to \mathbf{R}\backslash\{1\}$

$$y \to \frac{y + 1}{y - 2}.$$

Si on applique la formule du cours, g^{-1} est dérivable pour $\frac{-3}{(\frac{y + 1}{y - 2} - 1)^2}$ non nul, ce qui est vérifie sur $\mathbf{R}\backslash\{2\}$ et on obtient $(g^{-1})'(y) = \frac{(\frac{y + 1}{y - 2} - 1)^2}{-3} = \frac{9}{-3(y - 2)^2} = \frac{-3}{(y - 2)^2}$.

En dérivant directement $\frac{y + 1}{y - 2}$, on obtient $(g^{-1})'(y) = \frac{(y - 2) - (y + 1)}{(y - 2)^2} = \frac{-3}{(y - 2)^2}$.

De même on écrira plutôt $g^{-1}(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$ et $(g^{-1})'(x) = \frac{-3}{(x - 2)^2}$.

3) Résolvons l'équation (3) : $y = \sqrt{x + 2}$ avec $x \geq -2$ inconnue et y paramètre.
Si $y < 0$, (3) n'a pas de solution. Si $y \geq 0$ (3) équivaut à $y^2 = x + 2$, soit $x = y^2 - 2$ et (3) a une unique solution.

k est alors une bijection de $\mathbf{A} = [-2 ; +\infty[$ sur $\mathbf{B} = [0 ; +\infty[$.

Et k^{-1} est définie par : $k^{-1} : [0 ; +\infty[\to [-2 ; +\infty[$

$$y \to y^2 - 2.$$

Ici il est bien sûr plus simple de dériver directement k^{-1} en utilisant son expression.
Retrouvons le résultat en appliquant la formule du cours, k^{-1} est dérivable pour y non nul, et on obtient pour $y > 0$, $(k^{-1})'(y) = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{(y^2 - 2) + 2}}} = 2\sqrt{(y^2 - 2) + 2} = 2y$.