Leçon 04 - Correction des "exercez-vous"

Exercez-vous 4 :

1) Calculer la fonction dérivée de la fonction k de l'exercez-vous **1** après avoir déterminé son ensemble de dérivabilité.

2) Calculer la fonction dérivée de la fonction ℓ de l'exercez-vous **1**, après avoir déterminé son ensemble de dérivabilité.

3) En reprenant la fonction g de l'exercez-vous **1**, calculer la dérivée de g^{10} après avoir déterminé son ensemble de dérivation.

4) En reprenant la fonction f de l'exercez-vous **1**, calculer la dérivée de $\frac{1}{f^5}$ après avoir déterminé son ensemble de dérivation.

5) On reprend toujours les fonctions f et g de l'exercez-vous **1**, déterminer f∘g son ensemble de définition et son ensemble de dérivation. Calculer alors (f∘g)'.

6) On reprend toujours les fonctions f et g de l'exercez-vous **1**, déterminer g∘f son ensemble de définition et son ensemble de dérivation. Calculer alors (g∘f)'.

Solution

1) k apparaît comme la fonction composée de $x \to x + 2$ et de $x \to \sqrt{x}$.
Donc D'(k) =]-2 ; +∞[et en appliquant la formule du cours on obtient, pour tout $x \in$ D'(f),
$k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \times 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} .= \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$.

2) De même ℓ apparaît comme le produit de x et de $\ln(x^2 + 3)$ et $\ln(x^2 + 3)$ comme la composée de $x \to x^2 + 3$ et de $x \to \ln x$. Puisque tout réel x, $x^2 + 3 > 0$, D'(ℓ) = **R** et en utilisant la formule du cours , la dérivée de $x \to \ln(x^2 + 3)$ est $\frac{2x}{x^2+3}$ et
$\ell'(x) = \ln(x^2 + 3) + \frac{2x^2}{x^2+3}$.

Remarquons que plus généralement $\boxed{\text{la dérivée de } \ln(u(x)) \text{ est } \frac{u'(x)}{u(x)}}$.

$\boxed{\text{Et la dérivée de } \ln|u(x)| \text{ est } \frac{u'(x)}{u(x)}}$

Il est bon de connaître ce résultat par cœur.

3) L'ensemble de dérivabilité de g^{10} est **R**\{1}d'après les théorèmes du cours et sur cet ensemble
$(g^{10})'(x) = 10\, g^9(x)\, g'(x)$.
D'où $(g^{10})'(x) = 10\,(\frac{2x+1}{x-1})^9 \frac{-3}{(x-1)^2} = \frac{-30(2x+1)^9}{(x-1)^{11}}$

4) L'ensemble de dérivabilité de $\frac{1}{f^5}$ est $\mathbf{R}\backslash\{-1 - \sqrt{2}\ ;\ -1 + \sqrt{2}\ \}$ d'après les théorèmes du cours puisque f(x) s'annule en $-1 - \sqrt{2}$ et en $-1 + \sqrt{2}$. et sur cet ensemble
$(\frac{1}{f^5})'(x) = (f^{-5})'(x) = -5f^{-6}(x)\ f'(x)$. D'où $(\frac{1}{f^5})'(x) = -5(x^2 + 2x - 1)^{-6}(2x + 2)$.

5) $fog(x) = f(g(x))$. f étant définie sur **R**, fog est donc définie sur
$D(g) = \mathbf{R}\backslash\{1\}$. f est dérivable sur **R** et g sur $\mathbf{R}\backslash\{1\}$, fog est donc dérivable sur $\mathbf{R}\backslash\{1\}$et
$(fog)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = (2\frac{2x + 1}{x - 1} + 2)\frac{-3}{(x - 1)^2} = \frac{-18x}{(x - 1)^3}$.

6) $gof(x) = g(f(x))$. g étant définie sur $\mathbf{R}\backslash\{1\}$ et f sur **R**, gof est définie pour $f(x)\neq 1$. Or $f(x) = 1$ équivaut à $x^2 + 2x - 2 = 0$, soit $x = 1 \pm\sqrt{3}$.
D'où $D(gof) = \mathbf{R}\backslash\{1+\sqrt{3}\ ;\ 1 - \sqrt{3}\ \}$. f est dérivable sur **R** et g sur $\mathbf{R}\backslash\{1\}$, donc gof est dérivable pour $f(x)\neq 1$ et $D'(gof) = \mathbf{R}\backslash\{1+\sqrt{3}\ ;\ 1 - \sqrt{3}\ \}$.
$(gof)'(x) = g'(f(x))f'(x) = \frac{-3}{((x^2 + 2x - 1) - 1)^2}(2x + 2) = \frac{-6x - 6}{(x^2 + 2x - 2)^2}$.