Leçon 04 - Correction des "exercez-vous"

Exercez-vous 2 :

1) Donner une équation de la tangente à la courbe d'équation
$y = x^2 + 2x - 1$ au point d'abscisse 0. Faire un dessin au voisinage de (0,-1).

2) Donner les équations des tangentes à la courbe d'équation $y = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$ aux points d'abscisses 0 et -1. Faire un dessin au voisinage des points d'abscisses 0 et -1.

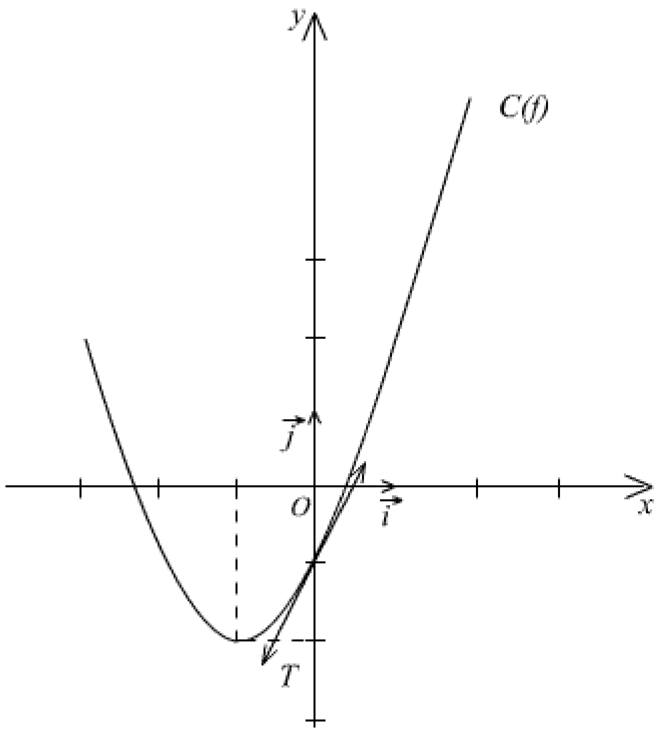
3) Donner les équations des tangentes à la courbe d'équation
$y = \sqrt{x + 2}$ aux points d'abscisses 0 et 2. Faire un dessin au voisinage des points d'abscisses 0 et 2.

4) Donner une équation de la tangente à la courbe d'équation
$y = x\ln(x^2 + 3)$ au point d'abscisse 0. Etudier la position de tangente par rapport à la courbe au voisinage de l'origine. Faire un dessin au voisinage de l'origine.

Solution

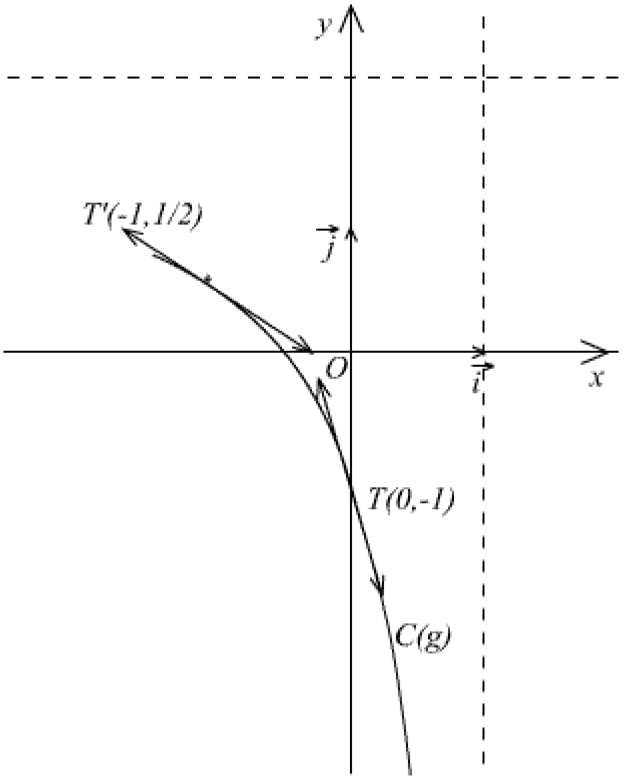
1) La tangente **T** à la courbe d'équation $y = x^2 + 2x - 1$ au point d'abscisse 0 existe puisque, d'après l'exemple **1**, f est dérivable en 0.
Cette tangente est, d'après le cours, la droite passant par (0,-1) et de coefficient directeur f'(0) = 2. D'où l'équation de **T** :

$$y = 2x - 1.$$



2) La tangente **T** à la courbe d'équation $y = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$ au point d'abscisse 0 existe puisque, d'après l'exemple **1**, g est dérivable en 0.
Cette tangente est, d'après le cours, la droite passant par (0,-1) et de coefficient directeur g'(0) = -3. D'où l'équation de **T** :

$$y = -3x - 1.$$

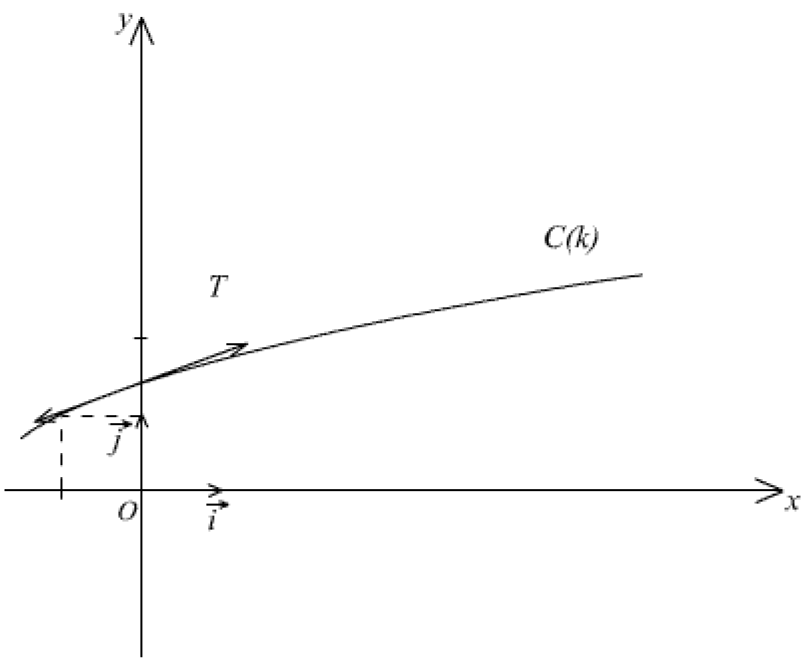


De même, la courbe admet une tangente **T'** au point d'abscisse -1 puisque $g'(-1) = -\frac{3}{4}$. Cette tangente est la droite passant par $(-1, \frac{1}{2})$ et de coefficient directeur $-\frac{3}{4}$. Son équation est donc

$$y = -\frac{3}{4}(x + 1) + \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$$

3) La tangente **T** à la courbe d'équation $y = \sqrt{x + 2}$ au point d'abscisse 0 existe puisque, d'après l'exemple **1**, k est dérivable en 0.
Cette tangente est, d'après le cours, la droite passant par $(0,\sqrt{2})$ et de coefficient directeur $k'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. D'où l'équation de **T** :

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2}}x + \sqrt{2}.$$



La courbe admet une tangente **T'** au point d'abscisse 2 puisque k'(2) = $\frac{1}{4}$. Et d'après ce résultat, cette tangente a pour équation

$$y = \frac{1}{4}\ (x - 2) + 2 \quad \text{soit} \quad y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

4) Toujours, d'après le résultat de l'exemple **1**, $\ell'(0)$ existe et $\ell'(0) = \ln 3$. La courbe d'équation $y = \ell(x)$ admet donc une tangente au point d'abscisse 0 et son équation est :

$$y = (\ln 3)x.$$

Pour faire un dessin correct, ne connaissant la représentation graphique de cette fonction, il est nécessaire d'étudier la position de tangente **T**, d'équation $y = (\ln 3)x$ par rapport à la courbe $C(\ell)$ d'équation $y = x\ \ln(x^2 + 3)$. Si M et m sont les points respectifs de $C(\ell)$ et de **T** d'abscisse x, ils sont l'un au dessus de l'autre, il s'agit de savoir lequel est au dessus. En étudiant le signe de la différence de leur ordonnée, on aura la réponse.
L'ordonnée de M est $y_M = x\ \ln(x^2 + 3)$ et celle de m est $y_m = (\ln 3)x$.
$y_M - y_m = x(\ln(x^2 + 3) - \ln 3)$. Or $x^2 + 3 \geq 3$ et puisque la fonction $x \to \ln x$ est croissante $\ln(x^2 + 3) \geq \ln 3$.
$y_M - y_m$ est donc du signe de x.
Et si $x \geq 0$, $C(\ell)$ est au dessus de **T**, par contre si $x \leq 0$, $C(\ell)$ est en dessous de **T**. D'où la représentation graphique suivante.