Leçon 04 - Correction des "exercez-vous"

Exercez-vous 1 :
1) Soit f la fonction telle que $f(x) = x^2 + 2x - 1$.Calculer le nombre dérivé f'(0).

2) Soit g la fonction telle que $g(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$. Calculer le nombre dérivé de g en 0 et en –1

3) Soit k la fonction telle que $k(x) = \sqrt{x + 2}$. Calculer le nombre dérivé de k en 0 et en 2.

4) Soit ℓ la fonction telle que $\ell(x) = x\ln(x^2 + 3)$. Calculer le nombre dérivé de ℓ en 0.

Solution

1) Nombre dérivé de f en 0 :

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2 + 2x - 1) - (-1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2x}{x} = \lim_{x\to 0} (x + 2)$$

et f'(0) = 2.

2) Nombre dérivé de g en 0 :

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\frac{2x+1}{x-1}) - (-1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{x - 1}$$

et g'(0) = -3.

Calcul de g'(-1).

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(-1 + h) - g(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2(-1 + h) + 1}{(-1 + h) - 1} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h}{2h(h - 2)} = \lim_{h\to 0} \frac{3}{2(h - 2)},$$

et $g'(-1) = -\frac{3}{4}$.

3) Calcul de k'(0) :

$$k'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{k(x) - k(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x + 2} - \sqrt{2})(\sqrt{x + 2} + \sqrt{2})}{x(\sqrt{x + 2} + \sqrt{2})} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + 2 - 2}{x(\sqrt{x + 2} + \sqrt{2})} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt{x + 2} + \sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Calcul de k'(2).

$$\lim_{h\to 0} \frac{k(2 + h) - k(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2 + h} - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{4 + h} - 2)(\sqrt{4 + h} + 2)}{h(\sqrt{4 + h} + 2)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{4 + h} + 2)} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{4 + h} + 2} = \frac{1}{4}.$$

et $k'(2) = \dfrac{1}{4}$.

4) Nombre dérivé de ℓ en 0 :

$$\ell'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\ell(x) - \ell(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\ln(x^2 + 3) - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(x^2 + 3) = \ln 3.$$