Leçon 03- Exercices

Exercice 1 Calculer les limites suivantes et conclure :

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 - 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^-} x^2 - 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

Exercice 2 Cet exercice est une préparation à l'utilisation des développements limités (leçon 6)

g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dont on sait uniquement que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\in \mathbb{R} \to f(x) = 2x - 3x^2 + x^2 g(x)$.

Soir r définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\in \mathbb{R} \to r(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 2 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

1) Etudier $\lim\limits_{x\to 0} r(x)$, puis $\lim\limits_{x\to 0} \frac{r(x) - r(0)}{x}$.

2) r est-elle continue en 0 ? est-elle dérivable en 0 ?

3) on pose, pour tout réel x, $u(x) = x + x^2$. Montrer que $f(u(x)) = 2x - x^2 + x^2 h(x)$, où h est une fonction telle que $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$.

Exercice 3

1) Trouver un contre-exemple qui prouve que $f_1 \sim g_1$ au voisinage de 0 et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de 0 n'implique pas forcément que $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$

2) Définissons la fonction h sur $]-2 ; +\infty [$ par :

$x \in]-2 ; +\infty [\ \to h(x) = \ln(2+x)$.

Que vaut h(0) ? Que vaut h'(0) ?

3) En déduire la valeur de la limite suivante $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(2+x) - \ln x}{x}$.

trouver un équivalent simple en 0 de ln(2+x) - ln2

Exercice 4 :

1) On cherche à prouver l'existence de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}} -1}{-x/2}$ et à calculer cette limite.

a) Première méthode : On définit la fonction numérique g sur $]-1 ; +\infty[$ par :

$x \in]-1 ; +\infty[\mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Calculer g(0) et en déduire $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x) - 1}{x}$ à l'aide d'une dérivation.

Conclure : en déduire la limite initiale.

b) Deuxième méthode : Etudier (existence et calcul) la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x}$ à l'aide des méthodes courantes rappelées dans le cours.

Conclure : en déduire la limite initiale.

2) Montrer que $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \sim 1 - \frac{x}{2}$ au voisinage de 0.

3) Quelle valeur approximative cela indique-t-il pour $\frac{1}{\sqrt{1.00028}}$? Présentée seule, cette valeur approximative n'est pourtant pas exploitable, pourquoi?

Exercice 5 Indiquer les ensembles de définition et déterminer les asymptotes aux courbes représentatives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x+1}$ 2) $g(x) = \frac{(x+1)^2}{2x - x^2}$ 3) $h(x) = xe^{-1/x}$.