Leçon 03- Correction des exercices

Exercice 1 Calculer les limites suivantes et conclure :

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 - 1 + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^-} x^2 - 1 + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$

Solution

Si $x\to 0^+$, $x > 0$ et $\sqrt{x^2} = x$ et $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$. Donc

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 - 1 + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = 0$.

Si $x\to 0^-$, $x < 0$ et $\sqrt{x^2} = -x$ et $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$. Donc

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 - 1 + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = -2$.

Exercice 2 Cet exercice est une préparation à l'utilisation des développements limités (leçon 6)

g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dont on sait uniquement que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\in \mathbb{R} \to f(x) = 2x - 3x^2 + x^2g(x)$.

Soir r définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\in \mathbb{R} \to r(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 2 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

1) Etudier $\lim\limits_{x\to 0} r(x)$, puis $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{r(x) - r(0)}{x}$.

2) r est-elle continue en 0 ? est-elle dérivable en 0 ?

3) on pose, pour tout réel x, $u(x) = x + x^2$. Montrer que $f(u(x)) = 2x - x^2 + x^2 h(x)$, où h est une fonction telle que $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$.

Solution

1) $\lim\limits_{x\to 0} r(x) = \dfrac{2x - 3x^2 + x^2g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 2 - 3x + xg(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{r(x) - r(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2 - 3x + xg(x)) - 2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} -3 + g(x) = -3$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} r(x) = 2 = r(0)$, donc r est bien continue en 0.

$r'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{r(x) - r(0)}{x} = -3$. r est donc bien dérivable en 0 et le nombre dérivée de r en 0 est -3.

3) $f(u(x))) = 2u(x) - 3u^2(x) + u^2(x)g(u(x)) = 2(x + x^2) - 3(x + x^2)^2 + (x + x^2)^2g(x + x^2)$,

$f(u(x)) = 2x + 2x^2 - 3x^2 - 6x^3 - 3x^4 + (x + x^2)^2g(x + x^2)$,

$f(u(x)) = 2x - x^2 + x^2(-6x - 3x^2+(1+x)^2g(x+x^2))$. Or $\lim_{x\to 0} (1+x)^2g(x+x^2) = 0$ et la dernière parenthèse est de la forme h(x) avec $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$. D'où le résultat.

Exercice 3

1) Trouver un contre-exemple qui prouve que $f_1 \sim g_1$ au voisinage de 0 et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de 0 n'implique pas forcément que $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$

2) Définissons la fonction h sur]-2 ; +∞ [par :

$x \in]-2 ; +\infty[\rightarrow h(x) = \ln(2+x)$.

Que vaut h(0) ? Que vaut h'(0) ?

3) En déduire la valeur de la limite suivante $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(2+x) - \ln 2}{x}$.

trouver un équivalent simple en 0 de ln(2+x) - ln2

Solution

1) Par exemple si $f_1(x) = x + x^2 + x^4$, $f_2(x) = -x - x^2$, $g_1(x) = x + x^2$ et $g_2(x) = -x$.
On a bien $f_1 \sim g_1$ au voisinage de 0 et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de 0. Par contre $f_1 + f_2 \sim x^4$ et $g_1 + g_2 \sim x^2$ donc $f_1 + f_2$ n'est pas équivalent à $g_1 + g_2$.

2) $h(0) = \ln 2$. $h'(x) = \dfrac{1}{2+x}$ et $h'(0) = \dfrac{1}{2}$.

3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(2+x) - \ln x}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{h(x) - h(0)}{x} = h'(0) = \dfrac{1}{2}$.

Donc $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(2+x) - \ln x}{x/2} = 1$ et $\ln(2+x) - \ln 2 \sim \dfrac{x}{2}$.

Exercice 4 :

1) On cherche à prouver l'existence de $\lim_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} - 1}{-x/2}$ et à calculer cette limite.

a) Première méthode : On définit la fonction numérique g sur]-1 ; +∞[par :

$x \in]-1 ; +\infty[\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$. Calculer g(0) et en déduire $\lim_{x\to 0} \dfrac{g(x) - 1}{x}$ à l'aide d'une dérivation.

Conclure : en déduire la limite initiale.

b) Deuxième méthode : Etudier (existence et calcul) la limite suivante : $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{x+1}}{x}$ à l'aide des méthodes courantes rappelées dans le cours.

Conclure : en déduire la limite initiale.

2) Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 \sim -\dfrac{x}{2}$ au voisinage de 0.

3) Quelle valeur approximative cela indique-t-il pour $\dfrac{1}{\sqrt{1.00028}}$? Présentée seule, cette valeur approximative n'est pourtant pas exploitable, pourquoi?

Solution

1) a) $g(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x) - 1}{x} = g'(0)$.

$g(x) = (1 + x)^{-1/2}$ et $g'(x) = -\frac{1}{2}(1 + x)^{-3/2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(1 + x)\sqrt{1 + x}}$, $g'(0) = -\frac{1}{2}$. Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - 1}{x} = -\frac{1}{2}.$$

Et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x) - 1}{-\frac{1}{2}x} = 1$, soit $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1}{-x/2} = 1$.

1) b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1 - \sqrt{x+1})(1 + \sqrt{x+1})}{x(1 + \sqrt{x+1})} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - (x + 1)}{x(1 + \sqrt{x+1})} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-1}{(1 + \sqrt{x+1})} = -\frac{1}{2}$.

Or $\frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1}{-x/2} = -2\,\frac{1 - \sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}} = \frac{-2}{\sqrt{x+1}}\,\frac{1 - \sqrt{x+1}}{x}$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1}{-x/2} = -2 \times (-\frac{1}{2}) = 1$.

2) D'après la question précédente $\frac{1}{\sqrt{x + 1}} - 1 \sim -\frac{x}{2}$.

3) En posant $x = 0.00028$ et en appliquant l'équivalent précédent $\frac{1}{\sqrt{1.00028}}$ peut-être approximé par $1 - 0.0014 = 0.0086$. En effet cette valeur approximative n'est pas exploitable car on en connaît pas la marge d'erreur.

Exercice 5 Indiquer les ensembles de définition et déterminer les asymptotes aux courbes représentatives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x+1}$ 2) $g(x) = \frac{(x+1)^2}{2x - x^2}$ 3) $h(x) = xe^{-1/x}$.

Solution

1) $D_f =]-\infty , -1[\cup]-1 , +\infty[$.

On peut écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = x - \frac{2}{x + 1}$. Donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = 0$ et la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$ ($x^2 = x - 2 < 0$ et $x + 1 \to 0^-$) et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ ($x^2 = x - 2 < 0$ et $x + 1 \to 0^+$), la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale.

2) $D_g =]-\infty , 0[\cup]0 , 2[.\cup]2 , +\infty[$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(1 + 2/x + 1/x^2)}{x^2(-1 + 2/x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1 + 2/x + 1/x^2}{-1 + 2/x} = -1$.

La droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(x+1)^2}{2x - x^2} = -\infty$ ($(x + 1)^2 > 0$ et $2x - x^2 \to 0^-$)

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(x+1)^2}{2x - x^2} = +\infty$ ($(x + 1)^2 > 0$ et $2x - x^2 \to 0^+$).

La droite d'équation $x = 0$ est donc asymptote verticale).

$\lim\limits_{x\to -2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{(x+1)^2}{2x - x^2} = +\infty$ ($(x + 1)^2 > 0$ et $2x - x^2 \to 0^+$)

$\lim\limits_{x\to -2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{(x+1)^2}{2x - x^2} = -\infty$ ($(x + 1)^2 > 0$ et $2x - x^2 \to 0^-$),

La droite d'équation $x = 0$ est donc asymptote verticale).

3) $D_h =]-\infty , 0[\cup]0 , +\infty[$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) = \pm\infty$ (en effet $\lim\limits_{x\to\pm\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-1/x} = 1$).

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-1/x} = 1$. et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (h(x) - x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x(e^{-1/x} - 1) = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{e^X - 1}{-X} = -1$ (on a posé $X = -\dfrac{1}{x}$).

Donc la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$ (en effet $\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-1/x} = +\infty$ et l'exponentielle "l'emporte sur x"). La droite $x = 0$ est donc asymptote verticale à gauche de 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 0$ (en effet $\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-1/x} = 0$), il n'y a pas d'asymptote à droite de 0.