Leçon 03 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 9

Déterminer

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+2}{x+2e^x}$, b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x+1}{x+3}$, d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2+1}{x+3}$

Solution

a) $x \underset{+\infty}{<<} e^x$ **, donc on factorise par e^x : pour tout $x > 0$ (on prend $x > 0$ comme condition suffisante pour que $x+2e^x \neq 0$)** $\dfrac{e^x+2}{x+2e^x} = \dfrac{e^x}{e^x}\,\dfrac{1+2e^{-x}}{2+xe^{-x}}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, **et** $x \underset{+\infty}{<<} e^x$ **, donc** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{e^x}\right) = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+2}{x+2e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+2e^{-x}}{2+xe^{-x}} = 1/2.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x+1}{x+3}$

Pour tout x de]0, +∞[, $\dfrac{\ln x+1}{x+3} = \dfrac{\ln x}{x}\,\dfrac{1+1/\ln x}{1+3/x}$ **, or** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x+1}{x+3} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2+1}{x+3}$

Le seul changement par rapport à b) est que l'on a remplacé lnx par $(\ln x)^2$, mais cela ne modifie pas le résultat , puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0.$

$\dfrac{(\ln x)^2+1}{x+3} = \dfrac{(\ln x)^2}{x}\,\dfrac{1+1/(\ln x)^2}{1+3/x}$ **. Or** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$,

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}\,\dfrac{1+1/(\ln x)^2}{1+3/x} = 0\,\dfrac{1}{1} = 0$ **, donc** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2+1}{x+3} = 0$