# *Leçon 03 – Correction des "Exercez-vous"*

**Exercez-vous 8**

a) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} (e^x - \ln x + 2)$

b) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} (e^x - e^{2x} + x^3)$, puis $\lim_{x \to -\infty} (e^x - e^{2x} + x^3)$

c) Déterminer $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$ (indication : on pourra commencer par poser t = 1/x et exprimer $\frac{1}{x}$ +lnx en fonction de t ).

**Solution**

**a) $\ln x \underset{+\infty}{<<} e^x$, on factorise donc par $e^x$ : pour tout x de ]0, +∞[, $e^x - \ln x + 2 = e^x\left(1 - \frac{\ln x}{e^x} + \frac{2}{e^x}\right)$,**

**Or $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$, d'où $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{e^x} + \frac{2}{e^x}\right) = 1$, donc $\lim_{x \to +\infty} e^x\left(1 - \frac{\ln x}{e^x} + \frac{2}{e^x}\right) = +\infty$.**

**b)**

**en + ∞ :**

**$x^3 \underset{+\infty}{<<} e^x \underset{+\infty}{<<} e^{2x}$, on factorise donc par $e^{2x}$ : pour tout x de IR , $e^x - e^{2x} + x^3 = e^{2x}\left(e^{-x} - 1 + x^3 e^{-2x}\right)$.**

**Or $\lim_{x \to +\infty} x^3 e^{-2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^{2x}} = 0$, d'où $\lim_{x \to +\infty} \left(e^{-x} - 1 + x^3 e^{-x}\right) = -1$, donc**

**$\lim_{x \to +\infty} e^{2x}\left(e^{-x} - 1 + x^3 e^{-2x}\right) = -\infty$, donc $\lim_{x \to +\infty} (e^x - e^{2x} + x^3) = -\infty$.**

**<u>en - ∞</u> : il n'y a pas d'indétermination : $\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ ,**

**donc $\lim_{x \to -\infty} e^x - e^{2x} + x^3 = -\infty$.**

**c) Il s'agit d'une forme indéterminée, car $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ , et $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.**

**Posons t = 1/x, alors 1/x + ln x = t + ln (1/t) = t - lnt, de plus $\lim_{x \to 0^+} (t) = \lim_{x \to 0^+} (1/x) = +\infty$ .**

**Il reste donc à chercher une limite en +∞ à t - lnt t.**

**Or $\ln t \underset{+\infty}{<<} t$, on factorise donc par t : t - lnt = $t\left(1 - \frac{\ln t}{t}\right)$ . Or $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$, d'où $\lim_{t \to +\infty} \left(1 - \frac{\ln t}{t}\right) = 1$,**

**donc $\lim_{t \to +\infty} t\left(1 - \frac{\ln t}{t}\right) = +\infty$.**

**Donc $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) = +\infty$ .**