Leçon 03 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 6
On vous donne 2 fonctions, pouvez vous les classer par la relation << au voisinage de la valeur indiquée ?

a) $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x)$ et $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 + 1$, en $+\infty$

b) $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x^2)$ et $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(2x)$ en $+\infty$

c) $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$ et $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ en 0, puis en $+\infty$

Solution

a) **Cherchons une limite en $+\infty$ au rapport de ces 2 expressions** : $\dfrac{x^2+1}{e^x}$.

¨Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\dfrac{x^2+1}{e^x} = \dfrac{x^2}{e^x} + \dfrac{1}{e^x}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$, car $x^2 \underset{+\infty}{\ll} e^x$;

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{e^x} = 0$,

donc $\boldsymbol{x^2+1 \underset{+\infty}{\ll} e^x}$.

b) pour tout x de $\mathbb{R}$, $\dfrac{\exp(2x)}{\exp(x^2)} = \exp(2x - x^2)$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - x^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$ (il s'agit de la limite en $+\infty$ d'un polynôme) ;

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(2x - x^2) = \lim\limits_{t \to -\infty} \exp(t) = 0$;

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp(2x)}{\exp(x^2)} = 0$, donc $\boldsymbol{\exp(2x) \underset{+\infty}{\ll} \exp(x^2)}$.

c) $x^2 \underset{0}{\ll} x^{1/2} = \sqrt{x}$ et $\sqrt{x} \underset{+\infty}{\ll} x^2$, ces deux relations sont indiquées dans le paragraphe 2.3.5, pour les prouver, il suffit de remarquer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} x^{3/2} = 0$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{-3/2} = 0$.