Leçon 03 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 5

a) Chercher $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + 1/x}{2 + 1/x}$

b) On définit, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{2e^x + 1}$, f a-t-elle une limite en - ∞ ? en +∞ ? en 0 ?

Solution

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1/x) = 0$, **donc** $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + 1/x) = 1$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 + 1/x) = 2$, **donc** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + 1/x}{2 + 1/x} = 1/2$.

b) en - ∞

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, **d'où** $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + 1) = 1$ **et** $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + 2) = 1$, **donc** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x + 1}{e^x + 2} = \dfrac{1}{1} = 1$.

en + ∞

$\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (e^x) = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty} (2e^x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2e^x) = +\infty$. **On se trouve donc face à une forme indéterminée, de type " ∞ / ∞ " . Mais on peut lever cette indétermination, en divisant numérateur et dénominateur par** e^x **: pour tout x de** $\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{2e^x + 1} = \dfrac{1 + e^{-x}}{2 + e^{-x}}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, **donc** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

en 0

$\lim\limits_{x \to 0} (e^x) = e^0 = 1$, **donc** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 2/3$.