Leçon 03 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 2

La fonction f_0: $x \in]0,+\infty[\mapsto \sqrt{4+1/x}$ a-t-elle une limite en $+\infty$? en 0 ?

La fonction f_1 : $x \in]1,+\infty[\mapsto \ln(x^2 - x) = \ln[x(x-1)]$ (a-t-elle une limite en $+\infty$? en 1 ?

La fonction f_2: $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{1/x}$ a-t-elle une limite en $+\infty$? en $-\infty$? en 0?

Solution

$\mathbf{f_0}$ est une fonction composée : $x \in]1,+\infty[\mapsto 4+1/x \quad \sqrt{4+1/x}$

En $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} 4 + 1/x = 4$, **et** $\lim\limits_{y\to 4} \sqrt{y} = 2$, **donc** $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = 2$

En 0 : $\lim\limits_{x\to 0^+} (4 + 1/x) = +\infty$, **or** $\lim\limits_{y\to+\infty} \sqrt{y} = +\infty$ **, donc** $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{4+1/x} = +\infty$,

on peut aussi noter cette limite $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{4+1/x}$ **, car f_0 n'est définie qu'à droite de 0.**

f_1 est la composée de la fonction $x \in]1,+\infty[\mapsto x^2 - x$ par la fonction ln.

En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x = +\infty$ **(car la limite en $+\infty$ d'un polynôme est elle de son monôme de plus haut degré, ici x^2) et** $\lim\limits_{y\to+\infty} \ln y = +\infty$ **, donc** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2 - x) = +\infty$

En 1 : De plus, $\lim\limits_{x\to 1^+} x^2 - x = 0^+$ **(car $x^2 - x = x(x-1)$ est positif sur $]1, +\infty[$)**

et $\lim\limits_{y\to 0^+} \ln(y) = -\infty$ **, donc** $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x^2 - x) = -\infty$ **. On peut aussi noter cette limite** $\lim\limits_{x\to 1} .f_1(x)$**, puisque f_1 n'est définie quà droite de 1.**

f_2: $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{1/x}$

en $+\infty$:

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} (1/x) = 0^+$ **, et $= e^0 = 1$, donc** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1/x} = 1$.

en $-\infty$

on a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty} (1/x) = 0^-$ **et** $\lim\limits_{y\to 0} e^y = e^0 = 1$**, donc** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1/x} = 1$

en 0

$\lim\limits_{x\to 0^+} (1/x) = +\infty$ **, et** $\lim\limits_{y\to+\infty} e^y = +\infty$ **, donc** $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} (1/x) = -\infty$ **, et** $\lim\limits_{y\to-\infty} e^y = 0$**, donc** $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$

f_2 n'a pas une limite en 0, elle a une limite à droite et une limite à gauche.