Leçon 03 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 14 :
a) Calculer, à l'aide d'une calculette, une valeur approchée de $e^{-1} - 1$ et rappeler la valeur de e^0.
b) En déduire que l'équation d'inconnue x : $e^x + x = 0$ a au moins une solution.
c) Dénombrer toutes les solutions à cette équation, et chercher une valeur approchée de chacune d'elles à 0,01 près.

Solution

a) $e^{-1} - 1 \approx -0{,}63$ à 0,01 près, $e^0 = 1$.

b) En appelant g la fonction : $x \in \mathbb{R} \mapsto g(x) = e^x + x$,

- g est **continue** sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur [0,1] (car c'est une somme de fonctions continues)
- $g(-1) = e^{-1} - 1 < 0$
- $g(0) = e^0 + 0 = 1 > 0$

donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un x_0 dans [-1,0] tel que $g(x_0) = 0$,
c'est-à-dire tel que $e^{x_0} + x_0 = 0$.
c) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée g' : $x \in \mathbb{R} \mapsto g'(x) = e^x + 1$. Donc $g'(x) > 0$ quel que soit x, g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc il n'y a qu'une seule solution à l'équation $g(x) = 0$. Notons-la x_0.
Cette solution est dans [-1, 0], d'après a). Procédons par dichotomie :
A chaque étape, lorsqu'on a établi que x_0 est dans un intervalle [a,b], on découpe cet intervalle en deux : $[a; \frac{a+b}{2}]$ et $[\frac{a+b}{2}; b]$, puis on cherche dans lequel de ces intervalles g change de signe.

$g(-1) < 0$, $g(0) > 0$ donc $-1 < x_0 < 0$.

$(-1 + 0)/2 = -0{,}5$ $g(-0.5) \approx +0{,}11 > 0$ du signe opposé à $g(-1)$ donc $-1 < x_0 < -1/2$

$(-1 - 0{,}5)/2 = -0{,}75$ $g(-0{,}75) \approx - 0{,}28 < 0$ du signe opposé à $g(-0{,}5)$ donc $-0{,}75 < x_0 < -0{,}5$

$(-0{,}75-0{,}5)/2 = -0{,}625$ $g(-0{,}625) \approx -0{,}09 < 0$ du signe opposé à $g(-0{,}5)$ donc $-0{,}625 < x_0 < -0{,}5$

$(-0{,}625 -0{,}5)/2 \approx -0{,}56$ $g(-0{,}56) \approx 0{,}01 > 0$ du signe opposé à $g(-0{,}625)$ donc
$-0{,}625 < x_0 < -0{,}56$

$(-0{,}625 -0{,}56)/2 \approx -0{,}59$ $g(-0{,}59) \approx -0{,}04 < 0$ donc $-0{,}59 < x_0 < -0{,}56$

$g(-0{,}58) \approx -0{,}02 < 0$ donc $-0{,}58 < x_0 < 0{,}56$.

Donc **$x_0 \approx - 0{,}57$ à 0,01 près.**