Leçon 03 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez vous 10 :

a) Chercher (existence, calcul) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$

b) Chercher (existence, calcul) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^3-x-1}{x^2+2x-3}$

Solution

a) Il s'agit d'une forme indéterminée, car numérateur et dénominateur s'annulent tous deux pour x = 2. Mais des polynômes s'annulant pour x = 2 peuvent se factoriser par (x - 2) .
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, et $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$. Pour la factorisation du second polynôme, $x^2 + x - 6$, on peut par exemple chercher a et b tels que $x^2 + x - 6 = (x-2)(ax + b)$, ou encore remarquer que le produit des racines de $x^2 + x - 6$ est -6/1 = -6, une racine étant 2, l'autre est donc - 3.
Donc pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$, $\frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}$. Donc $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$ existe, et vaut $\frac{2+3}{2+2} = \frac{5}{4}$.

b) Le polynôme $x \in \mathbb{R} \mapsto 2x^3 - x - 1$ s'annulant pour x = 1, cherchons à le factoriser par (x-1) :
$2x^3 - x - 1 = (x - 1)\, Q(x)$.
Le polynôme Q est obligatoirement de degré 2, donc il s'écrit $Q(x) = ax^2+bx+c$,
$2x^3 - x - 1 = (x-1)(ax^2+ bx + c) \Leftrightarrow 2x^3 - x - 1 = ax^3+ (b-a)x^2 + (c - b)x - c$. Ceci n'est vrai pour tout x que si les coefficients sont égaux, d'où $\begin{cases} a=2 \\ b-a = 0 \\ c-b = -1 \\ -c = -1 \end{cases}$, d'où a = 2=b, c = 1.

Donc $2x^3 - x - 1 = (x-1)(2x^2 +2x + 1)$.
D'autre part , pour tout x de $\mathbb{R}$, $x^2+ 2x - 3 = (x - 1)(x +3)$, donc pour tout x de $\mathbb{R} - \{1, -3\}$,
$\frac{2x^3 - x - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x-1)(2x^2+2x+1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{2x^2+2x+1}{x+3}$.

Donc $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^3 - x - 1}{x^2 + 2x - 3} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^2 +2x+1}{x+3} = 5/4$.