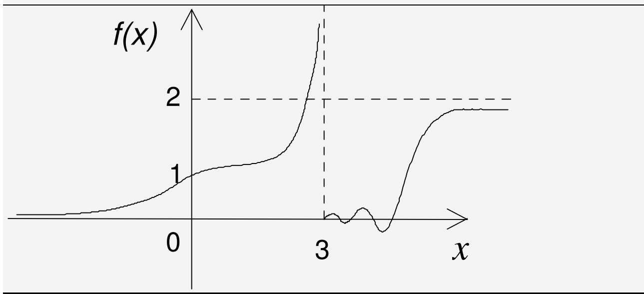
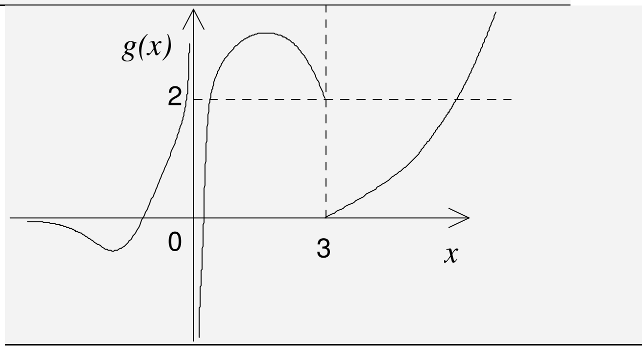
Leçon 03 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 1

a)





f a-t-elle des limites en ces valeurs de x ? $-\infty$, 0, 3, $+\infty$	g a-t-elle des limites en ces valeurs de x ? $-\infty$, 0 , 3, $+\infty$

b) f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2x+1$ si $x < 0$; $f(x) = -3x+1$ si $x > 0$
f a-t-elle une limite en 0 ?
Même question pour g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = 2x+1$ si $x < 0$; $g(x) = 2x+2$ si $x > 0$

c) f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ a-t-elle une limite en 0 ? en $+\infty$? (on pourra commencer par simplifier l'expression de f en distinguant 2 cas, $x > 0$, puis $x < 0$)

Solution

a)
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ (c'est tout simplement f(0))
f n'a pas une limite en 3 , mais une limite à gauche et une à droite : $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2^-$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0^-$,
en 0 g a une limite à gauche et une à droite : $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$
en 3 g a une limite à gauche et une à droite : $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 0$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
b) f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2x+1$ si $x < 0$; $f(x) = -3x+1$ si $x > 0$
f a-t-elle une limite en 0 ?
même question pour g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = 2x+1$ si $x < 0$; $g(x) = 2x+2$ si $x > 0$

b) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (2x+1) = 1$, d'autre part $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (-3x+1\ ) = 1$

La limite à droite est égale à la limite à gauche, donc f admet une limite en 3 : 1.

$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} (2x+1) = 1$, et $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} (2x+2) = 2$

Donc g n'a pas une limite en 0, elle a une limite à droite et une limite à gauche, différentes.

c) Pour $x > 0$, $f(x)= x/x = 1$, et pour $x < 0$, $f(x) = |x|/x = -1$.

Donc : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$,

en revanche f n'a pas une limite en 0 , elle a une limite à droite et une à gauche :

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$; $\lim_{x \to 0^+} = +1$