Leçon 03- cours : Limites, continuité

Objectif de la leçon 3: Connaître les limites des fonctions usuelles aux bornes de leurs domaines de définition.
Savoir reconnaître les cas d'indétermination et déterminer les limites dans certains de ces cas. Connaître la traduction graphique des limites : les asymptotes. Reconnaître une fonction continue, en vue d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et de chercher les valeurs approchées de solutions d'une équation.

1. Limites

1.1 Premières notions et définitions

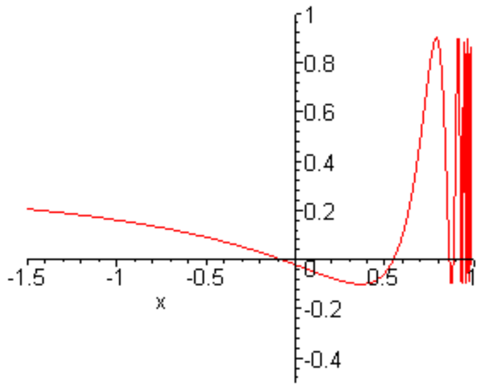
Dans le cadre de ce cours, on vous demande uniquement d'avoir une notion intuitive de ce qu'est une limite : une fonction a pour limite L en a si f(x) s'approche de L, infiniment près si L est un nombre, lorsque x s'approche de a.

On ne vous demande rien de plus, et vous avez déjà rencontré cette notion au lycée.

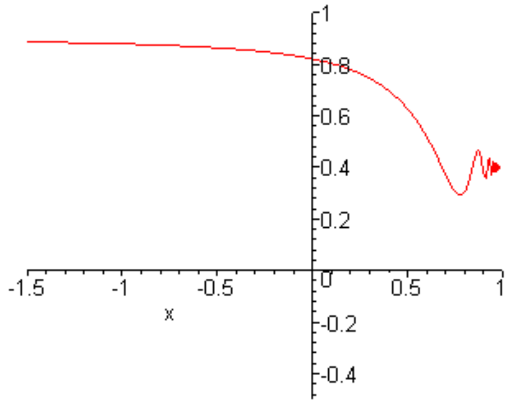
Ce paragraphe n'est là que pour vous permettre de clarifier cette notion et de l'approfondir. Il vous donne, à titre indicatif**,** quelques définitions rigoureuses, **qu'on ne vous demande pas d'apprendre**.

1.1.1 Approche : limite finie en un nombre fini.

Comparons les graphes de 2 fonctions, h et g , définies sur]-∞ , 1[U] 1, +∞[:

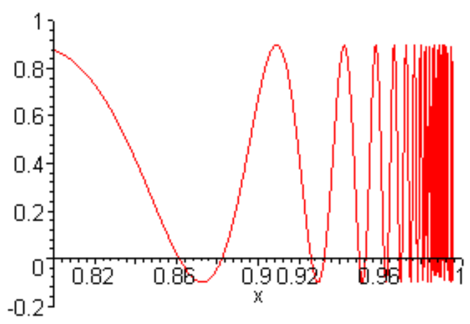


Représentation graphique de h

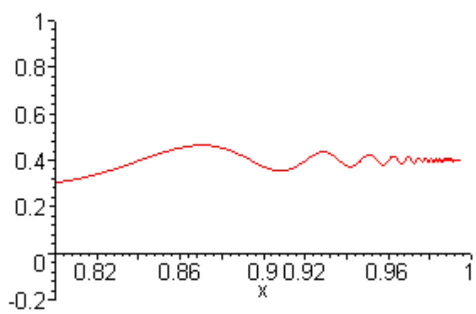


Représentation graphique de g

Ces fonctions ont clairement un comportement remarquable au voisinage de x = 1. Pour mieux l'observer, agrandissons le graphique au voisinage de x = 1. Pratiquement, on construit un graphique sur un intervalle plus fin contenant 1.



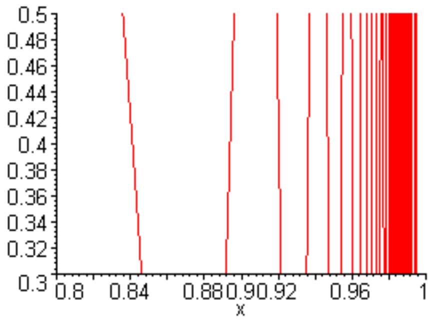
Représentation graphique de h



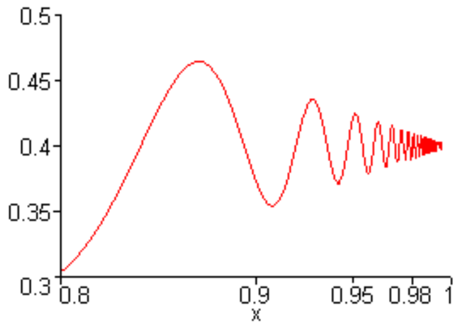
Représentation graphique de g

Visiblement les 2 fonctions n'ont pas le même comportement. g (x) semble s'approcher de la valeur 0.4 au fur et à mesure que x s'approche de 1.

Pour mieux le voir, effectuons un nouvel agrandissement, cette fois sur les ordonnées. On va donc utiliser un intervalle plus fin sur les ordonnés, par exemple [0, 3 ; 0, 5]



représentation graphique de h



représentation graphique de g

La situation est maintenant clairement la suivante :
à mesure que x s'approche de 1, g(x) s'approche, de plus en plus précisément, de la valeur fixe 0,4
Plus précisément, sur le graphique, il apparaît que :
g(x) approche de 0,4 avec une précision de 0,1, pour tout x de]0,8; 1[
g(x) approche de 0,4 avec une précision de 0,05 pour tout x de]0,9, 1[
et de façon générale:

Quelle que soit la précision p que l'on se fixe, aussi fine soit-elle, g(x) approche 0,4 avec cette précision, dès qu'on se restreint à un intervalle assez petit autour de 1.

Dans une telle situation, on dira que g a pour limite 0,4 en 1 , on le note ainsi :

$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0{,}4$ ou encore $\lim\limits_{1} g = 0{,}4$

1.1.2 Limite finie en un nombre fini : définitions

Ces définitions sont données à titre indicatif et ne seront pas demandées à un examen

Définition : limite finie L en une valeur finie x_0 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

L et x_0 désignent 2 nombres réels. On dit qu'une fonction f, définie sur un domaine de définition D inclus dans IR, a pour limite L , nombre réel, en x_0 , lorsque :
pour toute précision p > 0 , il existe un intervalle I_p , ouvert, suffisamment petit mais pas vide, contenant x_0 ou borné par x_0, telle que pour tout x de $D \cap I_p$, $L - p < f(x) < L + p$.

Une expression plus mathématique est indiquée ici, toujours à titre d'information et ne vous sera pas demandée à un examen

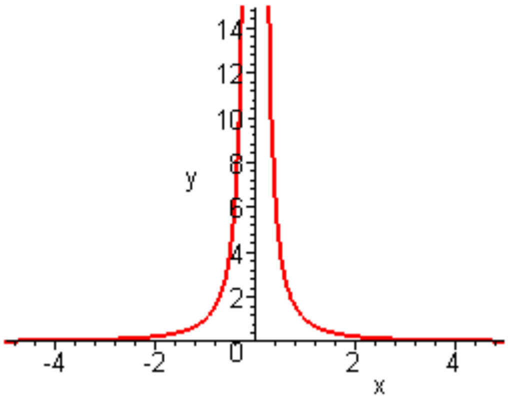
On écrit $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ lorsque :
pour tout p> 0 , il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout x de $D \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $L - p < f(x) < L + p$

1.1.3 Limite infinie d'une fonction en une valeur finie :

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Limite : +∞

Considérons la fonction g_3 définie sur IR* par : $x \in \mathbb{R}^* \mapsto g_3(x) = \frac{1}{x^2}$, dont voici une représentation graphique :



Sur le graphique, il semble que, à mesure qu'x s'approche de 0, la valeur $g_3(x)$ est de plus en plus grande, et n'admet aucune borne.

Plus précisément :
- $g_3(x) > 100$ dès que $-0{,}1 < x < 0{,}1$
- $g_3(x) > 10\,000$ dès que $-0{,}01 < x < 0{,}01$ et de façon générale,
- quelle que soit la borne A qu'on se fixe, aussi grande soit-elle, il existe un intervalle ouvert

I_A contenant 0 tel que , pour tout x non nul de cet intervalle, $g_3(x) > A$

(il suffit de prendre, pour $A > 0$, $I_A =]-\frac{1}{\sqrt{A}}, \frac{1}{\sqrt{A}}[$)

On dit que $\lim\limits_{x \to 0} g_3(x) = +\infty$.

Définition : **limite infinie en un nombre fini x_0**

Voici une première formulation intuitive ...

On dira ainsi que, pour un nombre x_0, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (« f a pour limite plus l'infini en x_0 ») lorsque f(x) reste supérieure à toute borne choisie dès qu'on se restreint, en fonction de cette borne, aux valeurs x suffisamment proches de x_0.

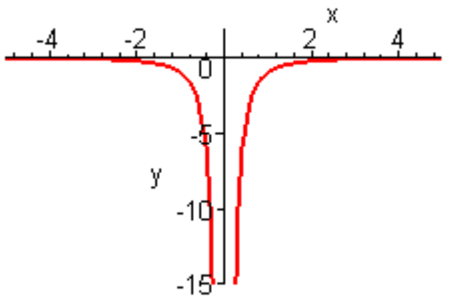
... et voilà une **définition plus rigoureuse**, qui est là à titre de référence et qu'on ne vous demande pas d'apprendre par cœur pour les examens:

f étant définie sur un domaine D, et x_0 appartenant à D ou en étant une borne,
on écrit que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ lorsque :
Quel que le nombre A, il existe un intervalle ouvert I_A, centré en x_0 , tel que pour tout nombre x de $I_A \cap D$, $f(x) > A$.

Limite - ∞

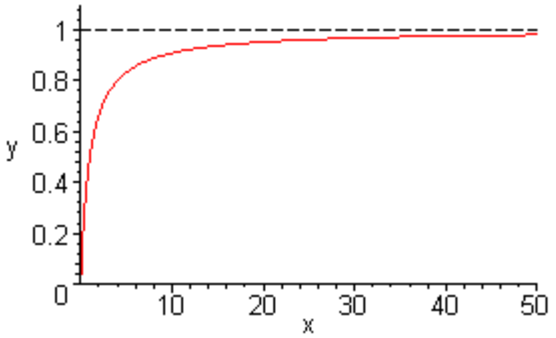
On écrit que $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ lorsque, -f a pour limite +∞ en x_0, c'est-à-dire lorsque f(x) est plus petite que n'importe quelle borne, dès qu'on se restreint à x assez proche de x_0.

Exemple : la fonction $g_4 : x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{1}{x^2}$ a pour limite - ∞ en 0: $\mathbf{\lim_{x \to 0} g_4(x) = -\infty}$



1.1.4 Limite finie L en + ∞ : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

Définissons, sur [0, +∞ [la fonction suivante : $g_2 : x \in [0,+\infty[\mapsto 1 - \frac{1}{1+x}$, voici son graphe



Les valeurs prises par $g_2(x)$ s'approchent de la valeur fixe 1, à mesure que x grandit.
Plus précisément, g_2 étant croissante, on peut affirmer :

- $g_2(x)$ approche 1 avec une précision de 0,1 dès que x > 9
  (car pour x >9, $1-1/10 < 1 - \frac{1}{1+x} < 1$)
- $g_2(x)$ approche 1 avec une précision de 0,05 dès que x > 19
  (car pour x >19, $1-1/20 < 1 - \frac{1}{1+x} < 1$)
- et de façon générale :

quelle que soit la précision p>0 qu'on se fixe , il existe une borne A telle que :
$1 - p < g_2(x) < 1 + p$ pour tout x > A (il suffit de prendre A = 1/p - 1)

.

On écrit alors que g_2 a pour limite 1 en +∞ : $\mathbf{\lim_{x \to +\infty} g_2(x) = 1}$

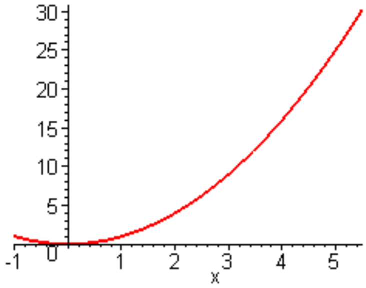
Voilà une définition rigoureuse, encore une fois donnée à titre d'information, on ne vous demande pas de l'apprendre cette année:

Définition :
On écrit qu'une fonction f admet une limite finie L en $+\infty$ lorsque :
pour tout $p > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > A$, $L - p < f(x) < L + p$

1.1.5 Limite infinie d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$:

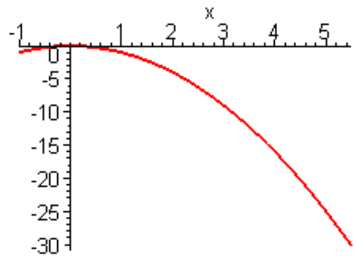
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ ou } -\infty \;, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \text{ ou } -\infty$$

Considérons la fonction $g_5 : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$
$g_5(x)$ reste **supérieure à toute borne fixée**, dès qu'on se restreint à **x assez grand**.
$g_3(x) > 100$ pour tout $x > 10$,
$g_3(x) > 10\,000$ pour tout $x > 100$, et de façon générale,
pour toute borne $A > 0$, il existe un nombre α tel que :
pour tout $x > \alpha$, $g_5(x) > A$ (il suffit de prendre $\alpha = \sqrt{A}$)
On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



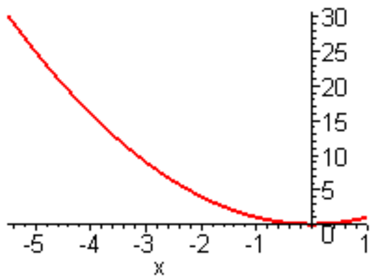
La fonction $g_6 = - g_5$, prend des valeurs **inférieures à toute borne fixée**, dès que l'on se restreint à x assez grand :

On écrit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



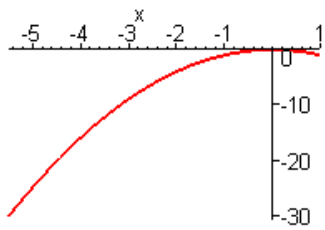
Intéressons nous à nouveau à $g_5 : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$, cette fois ci pour $x < 0$.
$g_5(x)$ est toujours **supérieure à toute borne fixée,** dès que x est suffisamment petit :
- $g_5(x) > 100$ dès que $x < -10$,
- $g_6(x) > 10\,000$ dès que $x < -100$,
- et pour toute borne A , il existe α tel que :

$g_5(x) > A$ pour tout $x < \alpha$ (il suffit de prendre $\alpha = -\sqrt{A}$)
On écrit que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



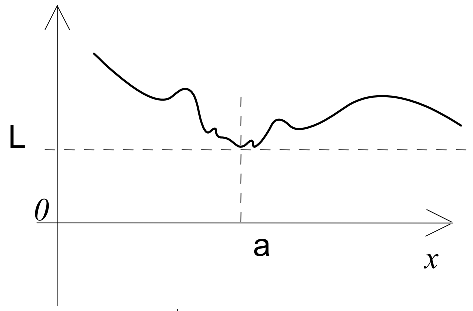
Enfin, intéressons nous à la fonction g_6 sur $\mathbb{R}^-$,
$g_6(x)$ est **inférieure à toute borne fixée** dès que x est suffisamment petit.
- $g_5(x) < -100$ dès que $x < -10$,
- $g_6(x) < -10\,000$ dès que $x < -100$,
- et pour toute borne A, aussi petite soit-elle, il existe α tel que :

$g_5(x) < A$ pour tout $x < \alpha$ (il suffit de prendre $\alpha = -\sqrt{A}$)
On écrit que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

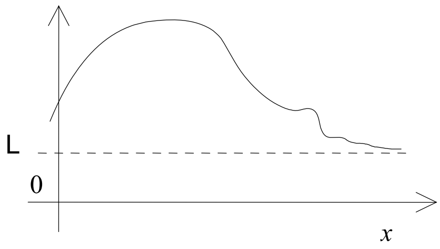


1.2 Limite par valeurs supérieures, inférieures :

On écrit que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L^+$, a désigne un nombre, ou $+\infty$, ou $-\infty$, lorsque f a pour limite L en a et, de plus, f(x) est toujours supérieure à L dès que x est assez proche de a

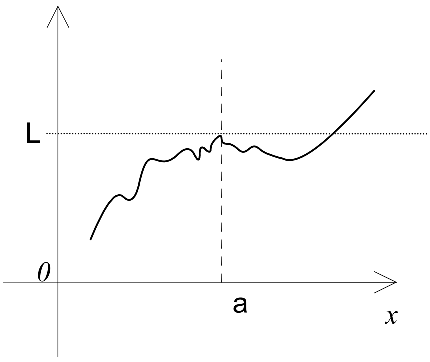


$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L^+$, $a \in \mathbb{R}$

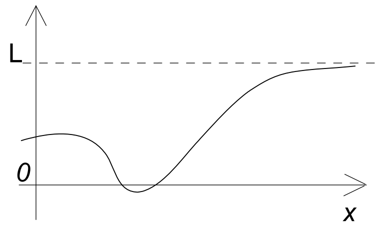


$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L^+$

On écrit que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L^-$, a désigne un nombre, ou $+\infty$, ou $-\infty$, lorsque:
f a pour limite L en a, et, de plus, f(x) est toujours inférieure à L dès que x est assez proche de a.



$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L^-$, $a \in \mathbb{R}$



$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L^-$

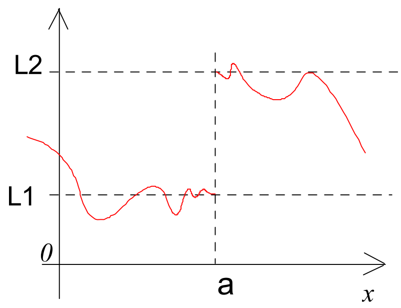
1.3 Limite à droite, limite à gauche : $\lim\limits_{x\to a+}$, $\lim\limits_{x\to a-}$

Soit f une fonction définie au voisinage de a, c'est-à-dire , sur un intervalle contenant ou borné par a , sauf éventuellement en a.

On dit que $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = L$ lorsque la restriction de f aux nombres supérieurs à a, a pour limite L, et que $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = L$ lorsque la restriction de f aux nombres inférieurs à a, a pour limite L.

Exemple

voici la représentation graphique d'une fonction f : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L1$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L2$



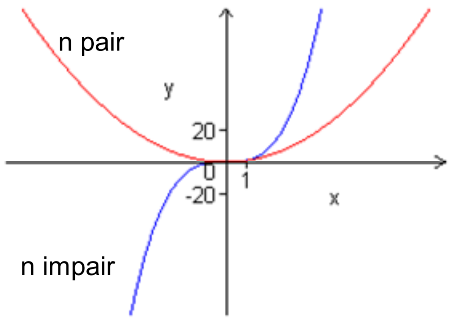
1.5 Limites usuelles : (*Il faut les connaître pour maîtriser ce cours !)*

1.5.1 Fonction puissance entière positive, $x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$ où n est un entier strictement positif et a est un nombre réel.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

Si n impair $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$,

Si n pair $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$.



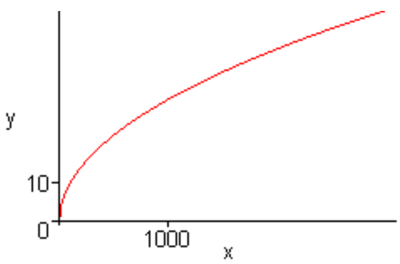
1.5.2 Fonction polynôme : $x \in \mathbb{R} \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont les mêmes que celles du **monôme de plus haut degré**, $a_n x^n$. Si $a_n > 0$, ce sont celles de x^n. Si $a_n < 0$, il suffit de changer les signes.

Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + 7x^2 - 2x^3 = \lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3 = -\infty$

1.5.3 Racine carrée, puissance réelle positive :

$x \in [0, +\infty[\mapsto \sqrt{x} = x^{1/2}$



$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

et de façon générale:

Puissance réelle positive : $x \in]0, +\infty[\mapsto x^b$, avec **b nombre réel strictement positif**.

$\lim_{x \to +\infty} x^b = +\infty$ $\qquad\qquad$ $\lim_{x \to 0} x^b = 0$

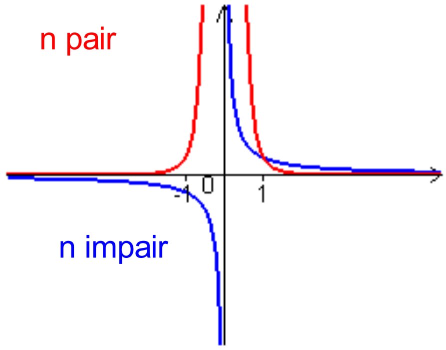
1.5.4 Puissance entière négative : $x \in IR \mapsto x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$,

où n est un entier strictement positif.

En 0 : $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty;$

si n est impair $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$, si n est pair $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = +\infty;$

En + ∞ et - ∞ $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0;$

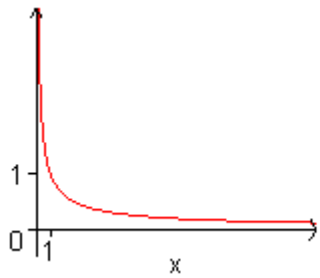


1.5.5 Puissance réelle négative $x \in]0, +\infty[\mapsto x^b$, avec b nombre réel négatif, non entier :

Une telle fonction a le même comportement que les fonctions précédentes en $+\infty$ et en 0^+ en revanche le problème ne se pose pas en 0^- et en $-\infty$ puisque la fonction n'est pas définie sur IR^-**.**

en 0^+ : $\lim_{x \to 0} x^b = +\infty$

en $+\infty$: $\lim_{x \to 0} x^b = 0^+$



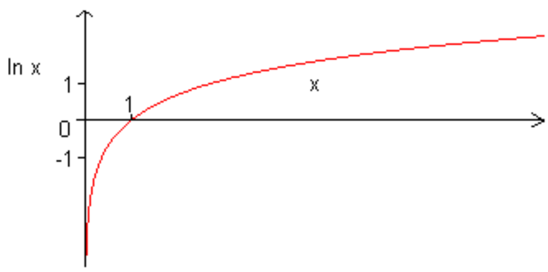
1.5.6 Logarithme népérien : $x \in]0; +\infty[\mapsto \ln x$

$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$;

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$



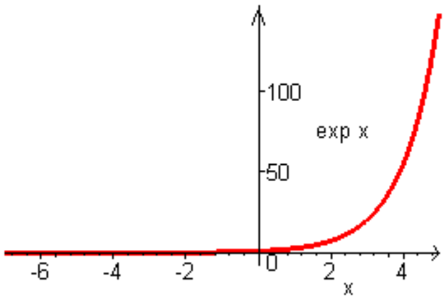
1.5.7 Exponentielle : $x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$;

$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

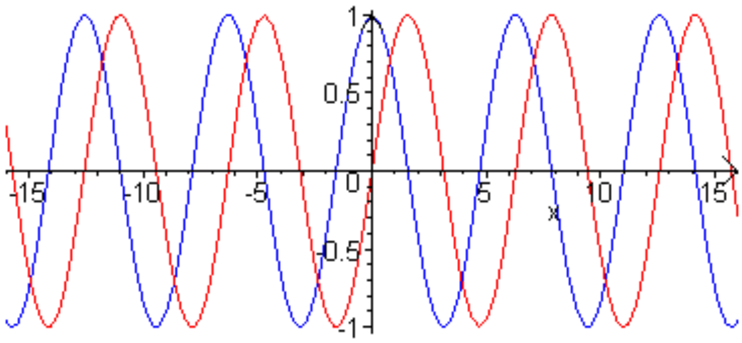
$e^0 = 1$, il arrive qu'au voisinage de 0 on ait à comparer $e^x - 1$, qui tend vers 0, avec x. La limite suivante est alors utile :

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$



1.5.8 Sinus et cosinus

Elles sont définies sur $\mathbb{R}$ et n'ont pas de limite en $+\infty$ et en $-\infty$: elles oscillent entre 1 et -1.



représentation graphique de
$x \in \mathbb{R} \mapsto \sin x$ (en rouge)
et $x \in \mathbb{R} \mapsto \cos x$ (en bleu)

2. Limites et opérations sur les fonctions :

Toutes les fonctions que vous rencontrerez cette année seront obtenues à partir d'opérations simples sur des fonctions usuelles.

2.1 Composée de fonctions : $x \mapsto f(g(x)) = fog(x)$

Théorème : Si g est une fonction telle que $\lim_{x \to x_0} g(x) = a$ (x_0 peut être un nombre, ou $+\infty$, ou $-\infty$), et f définie au voisinage de a, telle que $\lim_{y \to a} f(y) = b$.

Alors : $\mathbf{\lim_{x \to x_0} fog(x) = b}$

Remarque : ce théorème est cohérent avec la définition de la limite qui a été prise ici et qui est communément enseignée maintenant. Dans d'anciens ouvrages, on peut trouver une autre définition de la limite, pour laquelle ce théorème s'exprime différemment.

Exemples :

1. Cherchons $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 / (1-x^2)$:

Posons $y = g(x) = 1-x^2$, $f(y) = 1/y$, alors $1 / (1-x^2)= f(g(x))$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x^2) = - \infty$ et $\lim\limits_{y\to -\infty} 1/y = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1-x^2} = \lim\limits_{y\to -\infty} \dfrac{1}{y} = 0.$

2. Cherchons $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x)^2$:

$x \mapsto (\ln x)^2$ est la composée des 2 fonctions ln et puissance 2: $x \quad \ln x \quad (\ln x)^2$

Or $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = - \infty$, et $\lim\limits_{y\to -\infty} y^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x)^2 = 0$

2.2 Opérations et limites :

On considère ici deux fonctions f et g, telles que, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$. a peut être un nombre réel, $+ \infty$ ou $- \infty$. Les résultats sont détaillés dans les premiers paragraphes, puis le paragraphe 2 .2.4 le résume dans des tableaux.

2.2.1 Addition : $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x))$

Si L_1 et L_2 sont des nombres, alors	$\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$
Si L_1 est un nombre, et $L_2 = + \infty$ ou $- \infty$, alors	$\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = L_2$
Si $L_2 = L_1 =+ \infty$ ou $-\infty$, alors	$\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = L_1$

Si L1 = $+\infty$ et L2 = $- \infty$. Il s'agit d'une forme indéterminée, c'est à dire que cette information ne suffit pas à déterminer s'il y a une limite. Il peut y avoir des cas pour lesquels il y a une limite finie, infinie, ou pas de limite du tout. Nous verrons au paragraphe 0 comment essayer de lever cette indétermination.

Exemple :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 + x^2 +2x +1 = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^4+2 = - \infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^4 -x^3 = - \infty$ aussi,

mais , en utilisant la règle : la limite en $+\infty$ d'un polynôme est celle du terme de plus haut degré., il apparaît que :

$$\lim_{x\to+\infty} (x^4 + x^2 +2x +1) + (-x^4+2) = \lim_{x\to+\infty} x^2 + 2x + 1 = + \infty$$

alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^4 + x^2 +2x +1) + (-x^4 -x^3) = \lim\limits_{x\to+\infty} (- x^3 +x^2 +2x + 1) = - \infty$

2.2.2 Produit : $\lim_{x \to a} f(x)\, g(x)$

Si $L_1 \in \mathbb{R}$ et $L_2 \in \mathbb{R}$ **Alors** $\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = L_1 L_2$

Exemple : $\lim_{x \to +\infty} (2+1/x) = 2$, $\lim_{x \to +\infty} (e^{-x}) = 0$ d'où $\lim_{x \to +\infty} (2+1/x)e^{-x} = 2\times 0 = 0$

Si $L_1 \in \mathbb{R}$ $L_1 \neq 0$ et $L_2 = +\infty$ ou $-\infty$ **Alors** $\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = +\infty$ si L_1 et L_2 de même signe

$\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = -\infty$ sinon

Exemple : **1.** $\lim_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{x} \right) = 2$ $\lim_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$ d'où $\lim_{x \to +\infty} -x^2\left(2 + \frac{1}{x} \right) = -\infty$

Si $L_1 = 0$ et $L_2 = +\infty$ ou $-\infty$: il s'agit d'une **forme indéterminée**. Cela ne suffit pas pour savoir s'il y a une limite, ni ce qu'elle peut valoir. Il faut faire des calculs supplémentaires, *cf.* paragraphe 0.

2. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$, $\lim_{x \to 0} (3x^2) = 0$, $\lim_{x \to 0} 2\, x^2 \frac{1}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{x^2} = 0$

2.2.3 Quotient : $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

Si $\mathbf{L_1 \in \mathbb{R}}$ **et** $\mathbf{L_2 \in \mathbb{R}}$, $L_2 \neq 0$ Alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$

Exemple : $\lim_{x \to +\infty} (2 + 1/x) = 2$, $\lim_{x \to +\infty} (3 + 1/x) = 3$, d'où $\lim_{x \to +\infty} \frac{2+1/x}{3+1/x} = \frac{2}{3}$

Si $\mathbf{L_1 \in \mathbb{R}}$ **et** $\mathbf{L_2 = +\infty}$ **ou** $\mathbf{-\infty}$ Alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Exemple : $\lim_{x \to +\infty} (2 + 1/x) = 2$ et $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, d'où $\lim_{x \to +\infty} \frac{2+1/x}{x^2} = 0$

Si $\begin{cases} L_1 \in \mathbb{R},\ L_1 \neq 0 \\ \text{ou } L_1 = +\infty \\ \text{ou } L_1 = -\infty \end{cases}$, et $L_2 = 0^+$ ou 0^-

Alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ si L_1 et L_2 de même signe, $-\infty$ sinon

Exemples : 1. $\lim_{x\to+\infty}(2+1/x) = 2$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0^+$, d'où

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2+1/x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}(2+\frac{1}{x})x^2 = +\infty$$

2. $\lim_{x\to+\infty}(3x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0^+$, d'où $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{1/x} = \lim_{x\to+\infty}3x^2 = +\infty$

Dans tous les autres cas :

2 limites infinies,

$L_1 = 0 = L_2$

ou $L_2 = 0$ sans que l'on puisse préciser 0^+ ou 0^- ,

il s'agit d'une forme indéterminée.

Il peut y avoir une limite finie, ou infinie, ou aucune limite ... Pour le savoir il faut procéder à des calculs supplémentaires.

Exemples de cas de formes indéterminées :

$f(x) = 1/x$, $g(x) = 1/x^2$, $x_0 = +\infty$ indétermination de type " $\frac{\text{limite } 0}{\text{limite } 0}$ ",

ici $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}(x) = +\infty$,

$f(x) = 1/x^2$, $g(x) = 1/x$, $x_0 = +\infty$ indétermination de type " $\frac{\text{limite } 0}{\text{limite } 0}$ ",

ici $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$

$f(x) = e^x$, $g(x) = e^{2x}$, $x_0 = +\infty$ indétermination de type " ∞/∞ ",

ici $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}e^{-x} = 0$,

$f(x) = e^{2x}$, $g(x) = e^x$, $x_0 = +\infty$ indétermination de type " ∞/∞ ",

ici $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}e^x = +\infty$

2.2.4 Résumé de ces résultats :

lim f	*Lim g*	*lim(f + g)*
Nombre	$+\infty$	$+\infty$
Nombre	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

lim f	*lim g*	*lim fg*
nombre $\neq 0$, $+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant la règle des signes
0	$+\infty$ ou $-\infty$	Forme indéterminée

lim f	*lim g*	$\lim \frac{f}{g}$
nombre $\neq 0$	0^+ ou 0^-	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant la règle des signes
nombre	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$+\infty$ ou $-\infty$	0^+, 0^-, ou nombre $\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant la règle des signes
0	0, 0^+ ou 0^-	Forme indéterminée
nombre, $+\infty$ ou $-\infty$	0 (mais pas 0^+ ou 0^-)	Forme indéterminée
$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	Forme indéterminée

2.3 Comment traiter quelques cas de formes indéterminées ?

2.3.1 Comparaison des fonctions usuelles à l'infini et en 0

Il arrive que deux fonctions aient même limite 0, $+\infty$, ou $-\infty$, en une valeur x_0, mais que l'une d'entre elles tende à être infiniment plus grande que l'autre. C'est ce que nous apprendront les propriétés de comparaison de fonctions dans ce paragraphe.
Ces comparaisons de fonctions sont expliquées en détail, puis résumées au paragraphe 2.3.5

Pour les exprimer simplement, posons une définition :

Définition : $f(x) \underset{x_0}{<<} g(x)$

• Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ on écrit que f(x) est un **infiniment grand** d'ordre inférieur à g au voisinage de x_0, et on le note : $f(x) \underset{x_0}{<<} g(x)$.

• Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ et que $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, on écrit que f(x) est un **infiniment petit** d'ordre supérieur à g au voisinage de x_0, et on le note : $f(x) \underset{x_0}{<<} g(x)$.

Dans les 2 cas, cela signifie que f(x) tend à devenir infiniment plus petit que g(x) lorsque x tend vers x_0.

• Si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ on dit que f et g sont **équivalents** au voisinage de x_0, on le note $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$

Exemples : **1.** $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x - 1}$ et $g(x) = \frac{2x^3 + x^2}{(x-1)^2}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{(2x^2 - 3x)(x-1)^2}{(x-1)(2x^3 + x^2)} = \lim_{x\to 1} \frac{(2x^2 - 3x)(x-1)}{(2x^3 + x^2)} = 0 \text{ donc } f(x) \underset{1}{<<} g(x).$$

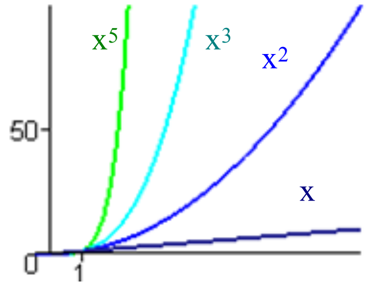
2. $$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(2x^3 + x^2)(x-1)}{(x-1)^2(2x^2 - 3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(2x + 1)(x-1)}{(x-1)^2(2x - 3)} = 0 \text{ donc } g(x) \underset{0}{<<} f(x).$$

3. $$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(2x^2 - 3x)(x-1)^2}{(x-1)(2x^3 + x^2)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^4\left(1 - \frac{3}{2x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{2x^4\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 1$$

Donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$.

2.3.2 Comparaison des puissances :

Observez les représentations graphiques de quelques fonctions puissances :
en $+\infty$, elles tendent toutes vers $+\infty$, mais plus l'exposant est grand , plus elles tendent rapidement vers l'infini.



Pour exprimer ceci plus rigoureusement, on étudie le rapport des ces fonctions :

pour a < b : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^a}{x^b} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{a-b} = 0$ puisque a-b < 0.

C'est à dire que lorsque x tend vers l'infini, x^a tend à devenir **infiniment plus petit** que x^b. On l'écrit : $x^a \underset{+\infty}{<<} x^b$

Remarque : ceci est vrai aussi si a < b < 0.

En 0, l'ordre est inversé: **pour a < b** : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^b}{x^a} = \lim\limits_{x \to 0} x^{b-a} = 0$ **,** c'est x^b qui tend à devenir infiniment plus petit que a , on l'écrit : $x^b \underset{0}{<<} x^a$

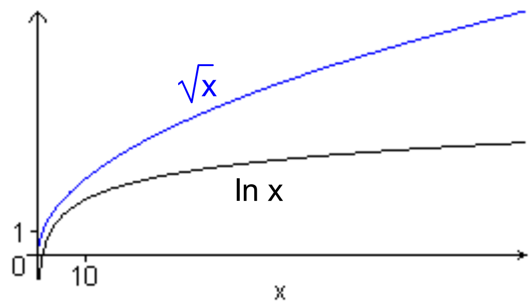
Conséquence : dans un rapport de 2 fonctions puissances la limite en $+\infty$ et la limite en 0^+ sont imposées par la plus grande puissance

C'est-à-dire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2} = +\infty = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^5} = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^5}$,
$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^3}{x^2} = 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} x^3$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^3}{x^5} = +\infty = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^5}$
dans ces expressions, **la limite est la même que si seule la puissance la plus grande était présente.**

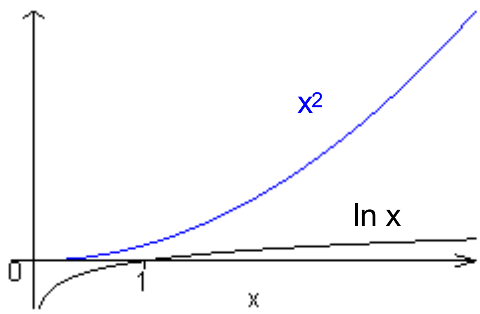
Quant à la limite en $-\infty$ ou en 0^-, possible si a et b sont entiers, le résultat est le même mis à part qu'il faut tenir compte du signe et donc de la parité des exposants

2.3.3 Comparaison entre une puissance entière et la fonction logarithme, ln :

en $+\infty$
si a>0 , $\lim\limits_{x \to +\infty} x^a = +\infty = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x)$. Cependant, sur un graphique il apparaît que x^a tend beaucoup plus rapidement vers $+\infty$ que ln(x)



comparaison de $\sqrt{x} = x^{1/2}$ et de ln x



Comparaison de x^2 et ln x

On peut le constater numériquement :
Ouvrez le programme 'calculette', et comparez ln x, $x^{1/2}$, x^2 pour x = 100, 10 000, 1 000 000..
Pour les comparer, évaluez leurs rapports $\frac{\ln x}{x^2}$, $\frac{\ln x}{x^{1/2}}$.
Le résultat, que nous ne pourrons démontrer dans ce cours, est :

pour tout a > 0 , $\ln x \underset{+\infty}{\ll} x^a$, ce qui, rappelons le, signifie

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$$

en 0^+ : si a > 0 , on a : $\lim_{x\to0^+} x^a = 0$, et $\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$

Donc si on cherche une limite en 0^+ à l'expression : $\mathbf{x^a \ln(x)}$, on se retrouve face à une **forme indéterminée.** Cependant, dans ce cas, on peut lever l'indétermination, c'est-à-dire trouver la limite :

$$\lim_{x\to0^+} x^a \ln(x) = 0$$

Preuve : il suffit de poser t = 1/x, on a alors $x^a \ln(x) = \frac{-\ln t}{t^a}$, $\lim_{x\to0^+} t = +\infty$, et le résultat précédent indique que $\lim_{t\to+\infty} \frac{-\ln t}{t^a} = 0$, d'où $\lim_{x\to0^+} x^a \ln(x) = 0$.
Les 2 résultats , en 0^+ et en $+\infty$ se résument ainsi :

dans un quotient ou un produit d'une puissance et de ln, c'est la puissance qui impose la limite , en 0^+ et en $+\infty$

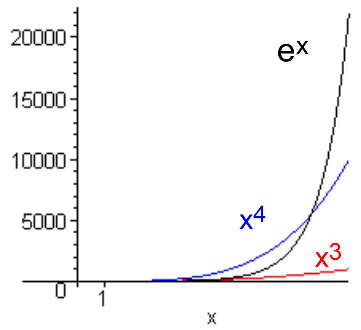
2.3.4 Comparaison d'une puissance et d'une exponentielle :

Le problème ne se pose qu'en $+\infty$ en $-\infty$.
Soient a, b 2 nombres strictement positifs.

en $+\infty$:

$\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} e^{bx} = +\infty$. On peut avoir à évaluer $\mathbf{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^{bx}}}$, qui s'écrit aussi $\mathbf{\lim_{x\to+\infty} x^a e^{-bx}}$. Il s'agit d'une **forme indéterminée.**

Comparons les représentations graphiques des fonctions puissance et exponentielle :



Il apparaît que, lorsque x tend vers $+\infty$, e^x tend vers nfini plus rapidement que les fonctions puissances.

On peut l'observer numériquement : activer la calculatrice et comparer e^x à x^2 et x^5.pour x = 10, 100, 1000. Attention, avec la calculatrice Windows, e^x s'obtient en cliquant sur Inv puis ln, et non sur Exp dont le rôle est de mettre en place la notation scientifique.

Le résultat rigoureux, que nous ne pourrons démontrer dans ce cours, est le suivant :

pour tous a, b > 0 : $x^a \underset{+\infty}{<<} e^{bx}$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^a}{e^{bx}} = 0$

en $-\infty$: le problème se pose si a est un entier (sinon la fonction puissance a n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^a = +\infty$ ou $-\infty$, selon que a est un entier pair ou impair.

D'autre part $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{bx} = 0$ si b > 0.

On peut donc avoir à évaluer $\lim\limits_{x \to -\infty} x^a e^{bx}$, il s'agit d'une forme indéterminée.

Mais on peut lever cette indétermination :

$$\boldsymbol{\lim_{x \to -\infty} x^a e^{bx} = 0}$$

Preuve : posons t = -x , on a alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} (t) = +\infty$, et $x^a e^{bx} = (-t)^a e^{-bt} = \dfrac{(-t)^a}{e^{bt}}$, or d'après le résultat précédent, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t^a}{e^{bt}} = 0$.

Ces 2 résultats se retiennent par la règle suivante :

Dans un produit ou un quotient d'une puissance et d'une exponentielle, c'est l'exponentielle qui impose la limite en $+\infty$ et $-\infty$

2.3.5 Résumé des comparaisons entre fonctions usuelles

Ces comparaisons se résument ainsi : a, b désignent deux nombres réels tels que 0 < a < b

en $+\infty$

$e^{-bx} << e^{-ax} << .. << x^{-n}. \ldots << x^{-2} << \dfrac{1}{x} << \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ infiniment petits (termes ayant pour limite 0 en $+\infty$)

$\ln x << (\ln x)^2 << \ldots. << (\ln x)^n << .. << \sqrt{x} << x << x^2 << .x^n << \ldots << e^{ax} << e^{bx}$ infiniment grands (de limite $+\infty$ en $+\infty$)

en 0^+ :

$$..x^3 << x^2 << x << \sqrt{x} << 1 << \ln x << (\ln x)^2 << (\ln x)^3 << \ldots << \frac{1}{\sqrt{x}} << x^{-1} << x^{-2} << x^{-3} << \ldots$$

Remarque 1 : **Attention !** Rappelons que $u(x) << v(x)$ au voisinage de x_0 signifie $\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = 0$.
Les règles encadrées ici permettent donc, dans les cas concernés, de donner la limite d'un quotient ou d'un produit, mais elles ne suffisent pas à elles seules, à justifier une affirmation portant sur une somme ou une fonction composée. Cette erreur est malheureusement courante.

1er exemple d'application de cette remarque : pour étudier la limite en $+\infty$ de la fonction $f_1 : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto f_1(x) = x^2 - \ln(x)$, **il ne suffit pas** d'invoquer ces règles de comparaison, car il s'agit d'une somme et non d'un produit. En revanche, on peut écrire, pour tout x de $]0, +\infty[$:
$\mathbf{f_1(x) = x^2(1 - \frac{\ln(x)}{x^2}}$). Alors le quotient $\frac{\ln(x)}{x^2}$ apparaît dans l'expression et les règles précédentes permettent d'affirmer : $\ln(x) << x^2$ au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$,
d'où $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\ln(x)}{x^2}\right) = 1$, d'où $\lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{x^2}\right) = +\infty$.

2nd exemple d'application de cette remarque : pour étudier la limite éventuelle en $+\infty$ de la fonction $f_2 : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto f_2(x) = \frac{\ln(e^{3x} + 1)}{x}$, il ne suffit pas de se fonder sur une phrase du genre « l'exponentielle l'emporte sur le logarithme » ou « x l'emporte sur le logarithme d'x » qui ne s'appliquent pas ici car il y a une fonction **composée** de ln et d'exp.
f_2 a 3 pour limite en $+\infty$, voici une façon de l'établir :
remarquons que pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$: $e^{3x} < e^{3x} + 1 < e^{3x} + e^{3x}$,
d'où $\ln(e^{3x}) < \ln(e^{3x} + 1) < \ln(2e^{3x})$, d'où $\frac{\ln(e^{3x})}{x} < \frac{\ln(e^{3x}+1)}{x} < \frac{\ln(2e^{3x})}{x}$,
d'où $\frac{3x}{x} < f_2(x) < \frac{\ln 2 + 3x}{x}$, d'où $3 < f_2(x) < \frac{\ln 2}{x} + 3$
En remarquant que $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln 2}{x} + 3\right) = 3$, on a donc $\mathbf{\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = 3}$
(f_2 étant toujours comprise entre la constante 3 et une fonction qui a 3 pour limite en $+\infty$).

Remarque 2 : Qu'en est-il pratiquement ? Dans les modèles économiques, on rencontre fréquemment des puissances de x ou des logarithmes. Les règles évoquées, qui font appel à des limites en $+\infty$, sont-elles valables aux échelles économiques ? Si la variable x représente un nombre d'individus, elle peut être au maximum de l'ordre de 1 000 (le nombre de personnes interrogées dans un sondage), 100 000 (une ville moyenne ou la clientèle potentielle d'une entreprise) de 1 000 000 (une grande ville) de 5 à 10 Milliards (la population mondiale, à différentes dates) . Si la variable x représente une quantité de monnaie, elle peut atteindre au maximum un ordre de grandeur d'un millier de milliards, c'est-à-dire 10^{12}.

On peut remarquer que :

Comparaison	Signification	Application numérique
$x \ll e^X$ en $+\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$	$0 < \frac{x}{e^x} < 0{,}001$ dès que $x > 10$, la limite est très vite approchée
$\ln x \ll x$ en $+\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = 0$	$0 < \frac{\ln x}{x} < 0{,}001$ dès que $x > 10\,000$, la limite est approchée pour un ordre de grandeur raisonnable
$\ln x \ll (\ln x)^2$ en $+\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{(\ln x)^2} = 0$	Pour avoir $0 < \frac{\ln x}{(\ln x)^2} = \frac{1}{\ln x} < 0{,}01$ il faudrait se restreindre à $x > \exp(100)$, d'où $x > 2 \cdot 10^{43}$, ce qui est hors de portée des données économiques. On peut considérer qu'elles ne permettent jamais d'approcher précisément cette limite.

2.3.6 Utiliser ces résultats pour lever des indéterminations :

Les problèmes d'indétermination se présentent dans des sommes ou des quotients. La technique est alors de **systématiquement mettre en facteur le terme dominant**, celui qui tend à devenir infiniment plus grand que les autres, donné par la liste des comparaisons des fonctions.

Polynômes

La solution a été déjà donnée: la limite en $+\infty$ ou $-\infty$ est celle du **monôme de plus haut degré**:
Par exemple pour $f_1(x) = -3x^2 + 10x + 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^2) = -\infty$

Fonctions rationnelles, c'est-à-dire quotients de polynômes.

Pour chercher **la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$**, on se trouve face à une forme indéterminée du type " ∞ / ∞ ".. Pour la lever, on peut **factoriser** numérateur et dénominateur par la **puissance de plus haut degré**.

- $\mathbf{f_2(x) = \dfrac{-3x^2 + 10x + 1}{4x^2 + 2x^3}}$.

  Pour tout x non nul du domaine de définition de f_2,

  $f_2(x) = \mathbf{\dfrac{x^2}{x^3}\,\dfrac{-3 + 10/x + 1/x^2}{4/x + 2}} = \dfrac{1}{x}\,\dfrac{-3 + 10/x + 1/x^2}{4/x + 2}$

  Il n' y a alors plus d'indétermination : au maximum 1 terme a pour limite 0, $+\infty$, ou $-\infty$.

  Ici: $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = 0 \cdot \dfrac{-3}{2} = 0$

- $\mathbf{f_3(x) = \dfrac{-2x^3 + 2x - 1}{4x^3 + x^2 + 1}}$ Pour chercher la limite en $+\infty$ ou $-\infty$, on factorise par la puissance de plus haut degré x^3.

  Pour tout x non nul du domaine de définition de f :

  $f_3(x) = \mathbf{\dfrac{x^3}{x^3}\,\dfrac{-2 + 2/x^2 - 1/x^3}{4 + 1/x + 1/x^3}} = \dfrac{-2 + 2/x^2 - 1/x^3}{4 + 1/x + 1/x^3}$. D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = \dfrac{-2}{4} = -1/2$

Somme de fonctions usuelles :

On **factorise** encore par le **terme dominant**, qui n'est pas forcément une puissance. Il faut se reporter à la liste de comparaison des fonctions usuelles.

- Soit f_4 définie sur $]0,+\infty[$ par: f1 **(x) = x^2 - ln x +1**. On cherche la limite éventuelle en $+\infty$, de cette fonction.
  Il s'agit d'une forme indéterminée. La comparaison $\ln x \underset{+\infty}{\ll} x^2$. indique de **factoriser par x^2** On écrit : pour tout $x > 0$ $\mathbf{f_1(x) = x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)}$
  On a alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$

- Soit f_5 définie sur $]0,+\infty[$ par: **f_5 (x) = x^2 - e^x +1**. On cherche la limite éventuelle en $+\infty$, de cette fonction La propriété $x^2 \underset{+\infty}{\ll} e^x$ indique de factoriser par e^x.

Pour tout x de IR, $\mathbf{f_5(x) = e^x \left(\frac{x^2}{e^x} - 1 + \frac{1}{e^x}\right)}$. .

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x}$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty} f_5(x) = -\infty}$

Quotients utilisant des fonctions usuelles

Comme pour les fonctions rationnelles, on **factorise** numérateur et dénominateur par le **terme dominant**, qui n'est pas forcément une puissance.

Soit f_6 définie sur $]0,+\infty[$ $\mathbf{f_6(x) = \frac{x - \ln x}{2 + e^{2x}}}$. On cherche $\lim\limits_{x\to+\infty} f_6(x)$.

D'après les propriétés de comparaison des fonctions usuelles, $\ln x \underset{+\infty}{\ll} x$ On factorise donc le numérateur par x. Au dénominateur, on factorise par e^{2x} qui est le seul terme à tendre vers $+\infty$:

Pour tout $x > 0$:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} =}$$

$$f_6(x) = \frac{x}{e^{2x}} \; \frac{1 - \frac{\ln x}{x}}{1 + 2/e^{2X}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} 2/e^{2x} = 0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{2x}} =}$$

On peut maintenant utiliser les limites connues : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (2/e^x) = 0$,

Donc $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty} f_6(x)}$ existe et vaut $0 \cdot \frac{1}{1} = \mathbf{0}$

- Soit f_7 définie sur $]0,+\infty[$ $f_7(x) = \dfrac{e^{-2x} + 2\mathbf{e^{--x}}}{\mathbf{e^{-2x}} + e^{-3x}}$. On cherche $\lim\limits_{x\to+\infty} f_7(x)$

  Il s'agit d'une forme indéterminée du type " limite 0/ limite 0 ".
  La comparaison $e^{-3x} \underset{+\infty}{\lll} e^{-2x} \underset{+\infty}{\lll} e^{-x}$ indique de factoriser par le terme dominant e^{-x} .au numérateur, e^{-2x} au dénominateur

  $$f_7(x) = \frac{\mathbf{e^{-x}}}{\mathbf{e^{-2x}}} \frac{e^{-x} + 2}{1 + e^{-x}} = e^{x} \frac{e^{-x} + 2}{1 + e^{-x}} .$$

  Maintenant il n'y a plus d'indétermination : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}+2) = 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 + e^{-x}) = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_7(x) = +\cdot\infty$.

2.3.7 Autres cas d'indéterminations :

Fonctions rationnelles, formes indéterminées du type " limite 0/limite 0 ".

Exemple : Y a-t-il une limite en 1 à $\dfrac{\mathbf{x^3+x^2 -2}}{\mathbf{x^2 - 1}}$ **?** (remarquons que le numérateur et le dénominateur ont tous deux pour limite 0)

De façon générale, il s'agit de déterminer s'il y a une limite en $a \in \mathbb{R}$ à la fonction $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes, et $P(a) = Q(a) = 0$ (dans l'exemple a = 1).

Puisque $P(a) = Q(a) = 0$, on peut **factoriser** P(x) et Q(x) **par (x-a)** (*cf* leçon 2 , fonctions usuelles). Il suffit alors de simplifier par x-a pour obtenir la limite.

Revenons à l'exemple : On cherche s'il y a une limite en 1 à $\dfrac{\mathbf{x^3+x^2 -2}}{\mathbf{x^2 - 1}}$ .Il s'agit donc d'une forme indéterminée du type " limite 0/ limite 0 " , mais on peut **factoriser** numérateur et dénominateur par **(x-1)**.

Factorisons le numérateur : cherchons des coefficients b,c d, tels que
$x^3+ x^2 - 2 = (x -1) (bx^2 + cx +d)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
ceci équivaut à $1x^3+ 1x^2 + 0\,x - 2 = b\,x^3 + (c - b)x^2 +(d -c)x - d$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

On résout donc $\begin{cases} b = 1 \\ c - b = 1 \\ d - c = 0 \\ -d = -2 \end{cases}$ dont la solution est b = 1, c = 2, d= 2 , d'où

$$\frac{\mathbf{x^3+x^2 -2}}{\mathbf{x^2 - 1}} = \frac{\mathbf{(x-1)(x^2+2x+2)}}{\mathbf{(x-1)(x+1)}} = \frac{x^2+2x+2}{x+1} \text{ pour tout x de } \mathbb{R}\backslash\{1; -1\},$$

Donc $\lim\limits_{\mathbf{x\to1}} \dfrac{\mathbf{x^3+x^2 -2}}{\mathbf{x^2 - 1}} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+2x+2}{x+1} = \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$

Différence de racines carrées :

On multiplie par la somme des 2 racines carrées (la quantité conjuguée) , cela permet de faire apparaître un polynôme et de trouver la limite

Exemple :
Cherchons (existence, valeur) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - 1}-\sqrt{x^2+1}$

Pour tout x de [1, +∞ [,

$$\sqrt{x^2 - 1}-\sqrt{x^2+2} = \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2+2})(\sqrt{x^2 -1} + \sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2 -1} + \sqrt{x^2+2}}$$ (on a multiplié haut et bas par $\sqrt{x^2 - 1}+\sqrt{x^2+1}$)

$$= \frac{x^2 - 1 - x^2 - 2}{\sqrt{x^2 -1} + \sqrt{x^2+2}}$$ (on développe et on simplifie)

$$= \frac{-3}{\sqrt{x^2 -1} + \sqrt{x^2+2}}$$

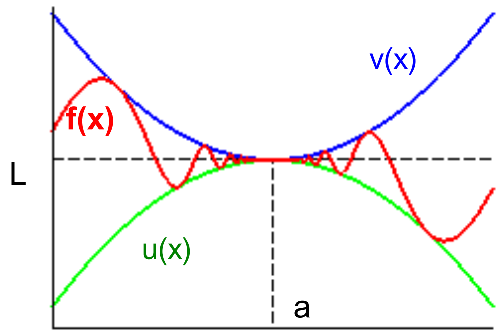
or $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 -1} + \sqrt{x^2+2} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3}{\sqrt{x^2 -1} + \sqrt{x^2+2}} = 0^-$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - 1}-\sqrt{x^2+2}$ existe et vaut 0^-

2.4 Théorème des gendarmes :

On cherche une limite à une fonction en l'encadrant entre 2 fonctions de limites connues.
f désigne ici une fonction numérique définie sur un domaine D, a désigne un nombre, +∞ ou - ∞.

u et v ont une limite L en a.
Si f est comprise entre u et v alors elle admet, elle aussi, L pour limite en a



Par exemple, considérons la fonction f définie sur IR* par :

Pour tout x de IR*, $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Cette fonction admet-elle une limite en 0 ? Cette question peut paraître ardue, car $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et la fonction sin n'a pas de limite en $+\infty$, mais on peut remarquer que pour tout x de IR*, $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, donc $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$.

f est donc encadrée par deux fonctions simples, dont on connaît la limite en 0.

2.4.1 Cas d'une limite finie

> **Théorème**
> Si il existe un intervalle I ouvert, contenant a (si a ∈ IR) ou borné par a (si a = +∞ ou a = - ∞) tels que pour tout x de I∩D,
> $$u(x) \leq f(x) \leq v(x) \text{ et } \lim_{x\to a} u(x) = \lim_{x\to a} v(x) = L$$
> alors **f a pour limite L en a.**

Exemple : gardons l'exemple d'introduction : pour tout x de IR*, $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

On cherche à savoir si f admet une limite en 0.

Alors pour tout x de IR*, $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$.
Ici l'intervalle I = IR contient évidemment 0, D domaine de définition de f est IR*, $u(x) = -x^2$, $v(x) = x^2$, et bien sûr $\lim_{x\to 0} u(x) = \lim_{x\to 0} v(x) = 0$.
On peut donc affirmer que $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} f(x) = 0}$.

2.4.2 Cas d'une limite infinie :

Pour une limite $+\infty$, la fonction v est inutile, et pour une limite $-\infty$ la fonction u est inutile:

Si il existe un intervalle I ouvert , contenant a (si a $\in$ IR) ou borné par a (si a = $+\infty$ ou a = $-\infty$) tels que pour tout x de $I \cap D$,

$$\mathbf{u(x) \leq f(x)}$$
$$\text{et } \lim_{x\to a} \mathbf{u(x) = +\infty}$$

alors f a pour limite $+\infty$ en a.

Si il existe un intervalle I ouvert , contenant a (si a $\in$ IR) ou borné par a (si a = $+\infty$ ou a = $-\infty$) tels que pour tout x de $I \cap D$,

$$\mathbf{f(x) \leq v(x)}$$
$$\text{et } \lim_{x\to a} \mathbf{u(x) = +\infty}$$

alors f a pour limite $+\infty$ en a

Exemples :

1. Déterminer par cette méthode $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}}$.

la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \sin(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$ (elle oscille infiniment)
mais pour tout nombre x, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, d'où

* pour tout x de $]0, +\infty[$: $- 1/x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1/x$
* $\lim_{x\to+\infty}(1/x) = \lim_{x\to+\infty}(-1/x) = 0$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0}$

2. Déterminer $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} 3e^x + [4x - \ln(x)]^2}$.

Puisque pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$ $[4x - \ln(x)]^2 \geq 0$ (car c'est un carré) , on a ,

* pour tout x de$]0,+\infty[$, $3e^x + [4x - \ln(x)]^2 \geq 3e^x$
* $\lim_{x\to+\infty} 3e^x = +\infty$

Donc, d'après le théorème des gendarmes , $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} 3e^x + [4x - \ln(x)]^2 = +\infty}$

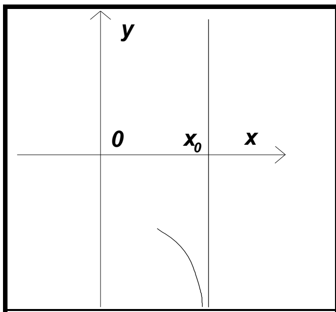
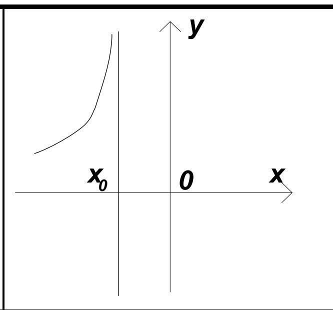
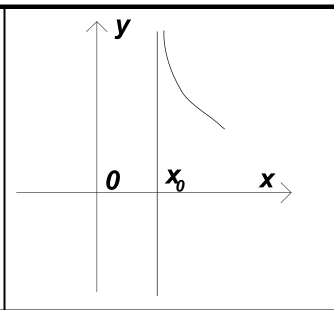
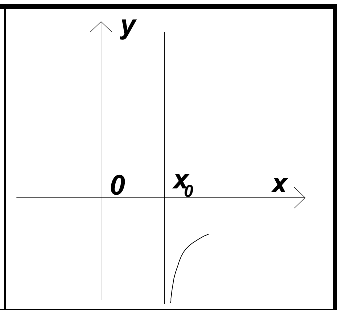
---

3. Limites et représentations graphiques : les branches infinies

3.1 Asymptotes verticales

Définition: Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ la droite *d'équation $x = x_0$* est ***asymptote verticale*** à la courbe représentative de f , notée C(f).

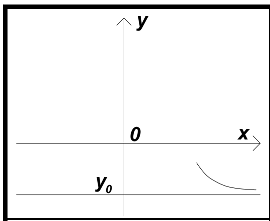
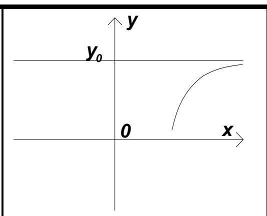
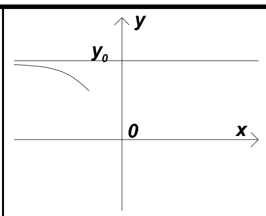
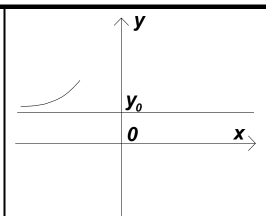
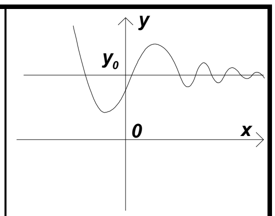
On obtient les différents cas de figures suivants:

			
$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$

3.2 Asymptotes horizontales

Définition: Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$, avec $y_0 \in \mathbb{R}$, la droite *d'équation $y = y_0$* est ***asymptote horizontale*** à la courbe représentative de f.

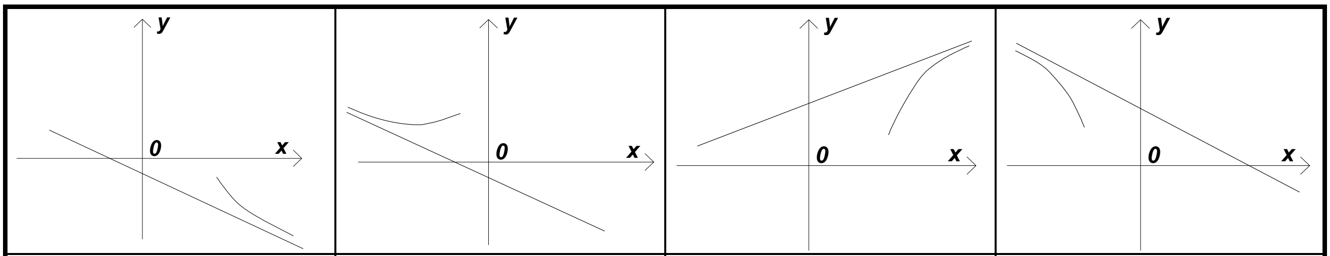
On obtient différents cas de figures :

				
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0^+$	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0^-$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0^-$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0^+$	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0$

3.3 Asymptotes obliques:

3.3.1 Définition:

La droite d'équation $y = ax + b$ est dite **asymptote oblique** à la courbe représentative de f lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{(f(x) - (ax+b)) = 0}$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$



$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (ax+b)) = 0^+$	$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - (ax+b)) = 0^+$	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (ax+b)) = 0$	$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - (ax+b)) = 0^-$

Remarque: si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (ax+b)) = \mathbf{0^+}$, ou $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - (ax+b)) = 0^+$, la courbe C(f) est **au dessus** de l'asymptote ,

si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (ax+b)) = \mathbf{0^-}$, ou $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - (ax+b)) = 0^-$ la courbe C(f) est **en dessous** de l'asymptote.

3.3.2 Détermination d'une asymptote oblique:

On se pose le problème de la détermination d'une asymptote oblique lorsque **la limite de la fonction étudiée, en +∞ ou -∞, vaut +∞ ou -∞**,.

On cherche $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $-\infty$

Pas d'asymptote oblique, on dit qu'il y a une **branche parabolique d'axe (Oy)**

si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$

on cherche $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - ax)$

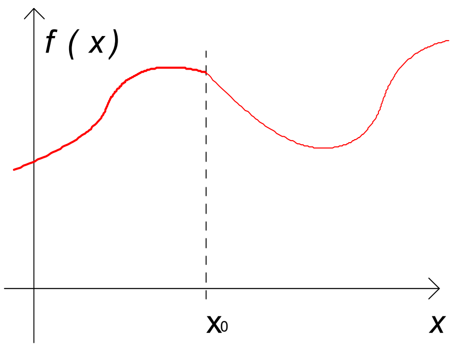
si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = +\infty$ ou $-\infty$

Pas d'asymptote oblique, on dit qu'il y a une **branche parabolique d'axe la droite d'équation y = ax**

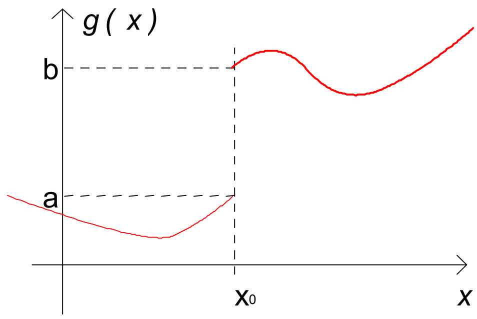
si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$

La droite d'équation y = ax + b est asymptote à la courbe représentative de f
Si de plus $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = b+$ la courbe est au dessus de la droite

4. Continuité :



Fonction continue



Fonction discontinue en x0

La fonction g a une **discontinuité** en x_0 : pour tracer son graphe il faut faire un saut, de a à b. La fonction f n'a pas de discontinuité, on dira qu'elle est **continue**. Les fonctions que l'on rencontrera seront très souvent continues. L'intérêt de cette notion est le théorème des valeurs intermédiaires, qui indique que si l'on choisit 2 valeurs atteintes par la fonction f, alors toute valeur intermédiaire entre elles est atteinte aussi par f.

Par exemple :

- La demande sur un réseau de distribution d'électricité est **continue** : on peut décider à l'avance d'importer de l'électricité d'un autre réseau lorsque la demande atteint ou dépasse un certain niveau. Si ce système entre en œuvre, ce sera lorsque la demande sera exactement égale à ce niveau.

- En revanche le cours d'une action est une fonction **discontinue** du temps , ne serait-ce que parce que la cotation est arrêtée la nuit et les jours fériés. Si on décide de vendre une action lorsque son cours atteint ou dépasse 100€ , il est possible que le vendredi soir à la clôture le cours soit de 96 € et que le Lundi matin à l'ouverture le cours soit de 103 €.La vente ne se fera donc pas à 100€ mais à 103€.

Définition
Une fonction numérique f , définie en x_0, est **continue en x_0** lorsque $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Une fonction numérique est dite continue sur un ensemble D si elle est continue en x pour tout x de D

Remarque : f continue en x_0 est équivalent à : f définie en x_0 et $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe. Dans d'anciens ouvrages, on peut rencontrer une autre définition de la limite, pour laquelle il n'y a pas cette équivalence.

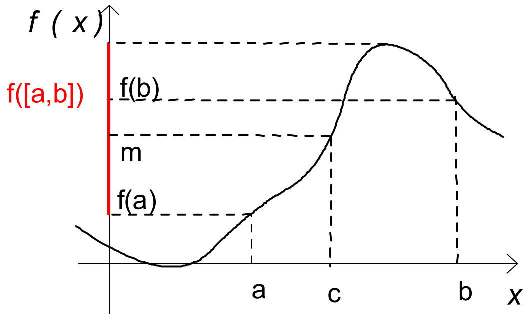
Exemples :
Les fonctions usuelles (polynômes, fonctions rationnelles, racines, puissances, logarithme, exponentielle, sinus, cosinus) sont continues sur tout leur ensemble de définition. Les sommes, produits, composées de fonctions continues sont continues.

Exemple de fonction discontinue:

.La fonction u définie sur IR par $x \in \mathbb{R} \mapsto u(x) = \begin{cases} 2x \text{ si } x \geq 1 \\ 3x \text{ si } x < 1 \end{cases}$ est discontinue en 1

4.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème :
Si f est une fonction continue, alors l'image de tout intervalle est un intervalle.



Remarque 1 : l'image de l'intervalle [a,b] est un intervalle, mais ce n'est pas forcément l'intervalle [f(a),f(b)], comme on peut le voir sur la figure.

Remarque 2 : En employant ce théorème dans une copie d'examen, il faut soigneusement le justifier, et **ne pas oublier** d'indiquer que la fonction considérée est continue !

Corollaire 1 :
Si f est définie sur un intervalle [a,b], alors pour tout m compris entre f(a) et f(b), il existe au moins un nombre c tel que f(c) = m.

Ce théorème ne peut pas être démontré dans ce cours, et nous l'admettrons. Il traduit l'idée suivante : puisqu'il n'y a pas de saut dans le graphe de la fonction , pour aller de f(a) à f(b) il faut passer par chacune des valeurs entre f(a) et f(b).

Corollaire 2:
Si f est une fonction continue strictement monotone sur un intervalle [a,b], alors f définit une bijection de [a, b] sur [f(a), f(b)] (si f est croissante) ou sur [f(b), f(a)] (si f est décroissante).

La différence avec le corollaire 1 est que pour tout m compris entre f(a) et f(b) , il existe **un seul** c de [a,b] tel que f(c) = m.

On utilise souvent **ce cas particulier** du théorème :

Corollaire 3 :
Si f est continue sur l'intervalle [a, b] , et f(a), f(b) de signes opposés, alors il existe au moins un c dans [a,b] tel que f(c) = 0

Utilité de ce théorème : Dans bien des cas, on rencontre des équations qu'**on ne sait pas résoudre explicitement**, c'est-à-dire qu'on ne sait pas en exprimer une solution sous la forme s = ... avec une combinaison des fonctions usuelles à droite de l'égalité. Mais, à défaut, ce théorème peut répondre à la question : **existe-t-il une solution** ?

$*$ cette question est souvent plus importante que celle de la valeur de la solution,

$*$ de plus, y répondre permet d'entamer des calculs pour **approcher** cette solution, c'est ce que nous allons voir.

4.2 Calcul approché des solutions d'une équation :

Étudions ce calcul sur un exemple :

1) Montrer que l'équation $4x^5+ 5x^4 - 2 = 0$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
2) Dénombrer les solutions de l'équation $4x^5+ 5x^4- 2 = 0$
3) donner des valeurs approchées à 0,01 près de ces solutions.

1) Appelons f la fonction : $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = 4x^5+ 5x^4 - 2$.
f est continue sur IR, car c'est un polynôme, $f(0) = -2 < 0$, $f(1) = 7 > 0$,
donc il existe au moins un c dans [0, 1] tel que $f(c) = 0$

2) **Dénombrons** les solutions de l'équation et cherchons un premier encadrement des solutions: il faut **étudier les variations** de la fonction (ce qui va nécessiter, ici, quelques notions de dérivation, *cf* leçon 4).
f est dérivable sur IR, $f'(x) = 20x^4+20x^3= 20x^3(x+1)$ change de signe en $x = 0$ et $x = -1$.
f ' est positive sur $]-\infty , -1[$ et sur $]0, +\infty[$, négative sur $]-1,0[$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Donc l'équation $f(x) =0$ n'a pas de solution dans $]-\infty , 0[$. En revanche, sur l'intervalle $[0, +\infty[$, f est **strictement croissante** et **continue,** $f(0) = -2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,
donc f forme une bijection de $[0,+\infty[$, sur $[-2, +\infty[$.

Donc **il existe une, et une seule, solution à l'équation f(x) = 0**, cette solution est dans l'intervalle $[0, +\infty[$

3) On encadre la solution par des intervalles successifs : à chaque fois qu'on a obtenu un intervalle [a, b],
sachant que f est croissante sur cet intervalle et qu'il y a une solution, il suffit de calculer $f(\frac{a+b}{2})$
pour savoir si la solution est dans $[a, \frac{a+b}{2}]$ ou dans $[\frac{a+b}{2}, b]$.

notons s la solution de $f(s) = 0$

$f(0) = -2$ $\quad f(1) = 7$ $\quad$ donc $0 < s < 1$

$f(\frac{0+1}{2}) = f(1/2) = -1{,}5625 <0$ $\quad$ donc $0{,}5 < s <1$

$\frac{0{,}5 +1}{2} = 0{,}75$, $f(0{,}75) =0{,}53125>0$ $\quad$ donc $0{,}5 < s < 0{,}75$

$\frac{0{,}5+0{,}75}{2} =0{,}625$, $f(0{,}625) \approx -0{,}86 < 0$ $\quad$ donc $0{,}625 < s < 0{,}75$

$\frac{0{,}75+0{,}625}{2} =0{,}6875$, $f(0{,}6875) \approx -0{,}27 < 0$ $\quad$ donc $0{,}6875 < s < 0{,}75$

$\frac{0{,}6875+0{,}75}{2} \approx 0{,}72$, $f(0{,}72)\approx 0{,}12 > 0$ $\quad$ donc $0{,}6875< s < 0{,}72$

$\frac{0,6875+0,72}{2} \approx 0,70$, $f(0,70) \approx -0,13 < 0$ donc $\mathbf{0,70 < s < 0,72}$

Donc **$s \approx 0,71$ à 0,01 près.**

Exercices

Exercice 1 : Calculer les limites suivantes et conclure :

$\lim_{x\to 0^+} x^2 - 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0^-} x^2 - 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

Exercice 2 : Cet exercice est une préparation à l'utilisation des développements limités (leçon 6)
g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dont on sait uniquement que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\in \mathbb{R} \to f(x) = 2x - 3x^2 + x^2 g(x)$.

Soir r définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\in \mathbb{R} \to r(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} \text{ si } x\neq 0 \\ 2 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

1) Étudier $\lim_{x\to 0} r(x)$, puis $\lim_{x\to 0} \frac{r(x) - r(0)}{x}$.

2) r est-elle continue en 0 ? est-elle dérivable en 0 ?

3) on pose, pour tout réel x, $u(x) = x + x^2$. Montrer que $f(u(x)) = 2x - x^2 + x^2 h(x)$, où h est une fonction telle que $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$.

Exercice 3 :

1) Trouver un contre-exemple qui prouve que $f_1 \sim g_1$ au voisinage de 0 et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de 0 n'implique pas forcément que $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$

2) Définissons la fonction h sur $]-2 ; +\infty[$ par : $x \in]-2 ; +\infty[\to h(x) = \ln(2+x)$.
Que vaut h(0) ? Que vaut h'(0) ?

3) En déduire la valeur de la limite suivante $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2+x) - \ln x}{x}$.

trouver un équivalent simple en 0 de $\ln(2+x) - \ln 2$

Exercice 4 :

1) On cherche à prouver l'existence de $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1}{-x/2}$ et à calculer cette limite.

a) Première méthode : On définit la fonction numérique g sur $]-1 ; +\infty[$ par :

$x \in]-1 ; +\infty[\mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Calculer g(0) et en déduire $\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - 1}{x}$ à l'aide d'une dérivation.

Conclure : en déduire la limite initiale.

b) Deuxième méthode : Étudier (existence et calcul) la limite suivante : $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x}$ à l'aide des méthodes courantes rappelées dans le cours.

Conclure : en déduire la limite initiale.

2) Montrer que $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \sim 1 - \frac{x}{2}$ au voisinage de 0.

3) Quelle valeur approximative cela indique-t-il pour $\frac{1}{\sqrt{1.00028}}$?

Présentée seule, cette valeur approximative n'est pourtant pas exploitable, pourquoi?

Exercice 5 : Indiquer les ensembles de définition et déterminer les asymptotes aux courbes représentatives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x+1}$ $\qquad$ 2) $g(x) = \frac{(x+1)^2}{2x - x^2}$ $\qquad$ 3) $h(x) = xe^{-1/x}$.