Leçon 2 – Correction des "Exercez-vous" : Fonctions classiques de IR dans IR

Exercez-vous 5
1 Déterminer Q(x) pour $P(x)= 2x^3-5x^2-5x+6$ et $\alpha = 3$
2 Déterminer Q(x) pour $P(x) = x^3-4x^2+x+6$ et $\alpha = -1$, puis déterminer les racines de Q(x). En déduire toutes les racines de P.

Solution

1) Pour cet exercice utilisons la **méthode de la division euclidienne**, d'utilisation plus rapide mais de maîtrise plus délicate que la méthode d'identification des coefficients, utilisée pour la correction de l'exercice suivant.

$2x^3-5x^2-5x+6$	$x - 3$
$-(2x^3 -6x^2)$	$2x^2 + x-2$
$x^2 - 5x+6$	
$-(x^2 -3x)$	
$-2x+6$	
$-(-2x+6)$	
0	

Donc **$Q(x) =2x^2 + x-2$**, $P(x) = (x-3)(2x^2 + x-2)$

2) utilisons la **méthode d'identification des coefficients**. Elle est plus simple à retenir que la méthode de la division euclidienne présentée à la correction de l'exercice précédent, mais elle aboutit à des calculs un peu plus longs.
on cherche un polynôme Q tel que $x^3-4x^2+x+6 = (x+1)Q(x)$. Q est donc de degré 2, posons $Q(x) = ax^2+bx+c$, et cherchons a,b,c

$x^3-4x^2+x+6 = (x+1)Q(x) \quad \Leftrightarrow x^3-4x^2+x+6 = (x+1)(ax^2+bx+c)$

$\Leftrightarrow x^3-4x^2+x+6 = ax^3 + (b+a)x^2 + (c+b)x +c$

ceci est vrai pour tout x de IR si et seulement si les coefficients de même degré sont égaux, c'est-à-dire :

$\begin{cases} 1 = a \\ -4 = b+a \\ 1 = b+c \\ 6 = c \end{cases}$, ceci est équivalent à $\begin{cases} a=1 \\ b = -4-1= -5 \\ c =1-b = 6 \\ c = 6 \end{cases}$

Donc **$Q(x) = x^2 - 5x +6$, et $P(x) = (x +1)(x^2 - 5x + 6)$**

Q est un polynôme du second degré, on peut chercher ses racines par la méthode habituelle, le discriminant est 1, il y a 2 racines : 2 et 3. On pouvait aussi remarquer que 2 est une racine évidente, la produit des racines étant 6/1 = 6 , l'autre racine est donc 3.
On a $P(x) = (x+1)Q(x)$,
d'où $P(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0$ ou $Q(x) = 0$,
donc **P a 3, et seulement 3, racines : - 1, 2 et 3**.