Leçon 2 – Correction des "Exercez-vous" : Fonctions classiques de IR dans IR

Exercez-vous 11

1) Simplifier $(\exp(3))^2$	$\dfrac{\exp(3)+\exp(-3)}{\exp(5)+\exp(-1)}$	$3^{\exp(\ln 6 - \ln 2)}$
2) Résoudre $5^x = 4$	$3^{2x-1} = 2^x$	$2^x + 2^3 = 2^x\, 2^4$

Solution

1) a) $(\exp(3))^2 = \exp(6) = e^6$

b) $\dfrac{\exp(3)+\exp(-3)}{\exp(5)+\exp(-1)}$: on essaie de faire apparaître exp(3) et exp(-3) au dénominateur en vue de simplifier ensuite.

$$\frac{\exp(3)+\exp(-3)}{\exp(5)+\exp(-1)} = \frac{\exp(3)+\exp(-3)}{\exp(3+2)+\exp(-3+2)} = \frac{\exp(3)+\exp(-3)}{\exp(3)\exp(2)+\exp(-3)\exp(2)}$$

$$= \frac{\exp(3)+\exp(-3)}{(\exp(3)+\exp(-3))\exp(2)} = \frac{1}{\exp(2)}$$

d'où $\dfrac{\exp(3)+\exp(-3)}{\exp(5)+\exp(-1)} = \exp(-2) = \mathbf{e^{-2}}$

c) $3^{\exp(\ln 6 - \ln 2)} = 3^{\exp(\ln(6/2))} = 3^{\exp(\ln 3)} = 3^3 = \mathbf{27}$

2) a) 2 nombres strictement positifs sont égaux si et seulement si leurs logarithmes sont égaux, car la fonction ln est bijective. Donc $5^x = 4 \Leftrightarrow x \ln 5 = \ln 4$

d'où $5^x = 4 \Leftrightarrow \mathbf{x = \dfrac{\ln 4}{\ln 5}}$

b) $3^{2x-1} = 2^x \Leftrightarrow (2x - 1)\ln 3 = x \ln 2$ (ici on a pris le ln de chaque membre de l'égalité)

d'où $3^{2x-1} = 2^x \Leftrightarrow x(2\ln 3 - \ln 2) = \ln 3$, d'où $\mathbf{3^{2x-1} = 2^x \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 3}{2\ln 3 - \ln 2}}$

c) $2^x + 2^3 = 2^x\, 2^4 \Leftrightarrow 2^3 = 2^x\, 2^4 - 2^x = 2^x(2^4 - 1)$, d'où $2^x + 2^3 = 2^x\, 2^4 \Leftrightarrow 2^x = \dfrac{2^3}{2^4 - 1}$,

d'où $2^x + 2^3 = 2^x\, 2^4 \Leftrightarrow x \ln 2 = \ln\left(\dfrac{2^3}{2^4 - 1}\right)$ utiliser les ln est possible, car $2^4 - 1 > 0$, donc $\dfrac{2^3}{2^4 - 1} > 0$

d'où $2^x + 2^3 = 2^x\, 2^4 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\ln 2}\ln\left(\dfrac{2^3}{2^4 - 1}\right) = \dfrac{1}{\ln 2}(3\ln 2 - \ln(2^4 - 1))$

d'où $\mathbf{2^x + 2^3 = 2^x\, 2^4 \Leftrightarrow x = 3 - \dfrac{\ln(2^4 - 1)}{\ln 2}}$