Leçon 01- cours :
Autour de la notion de fonction

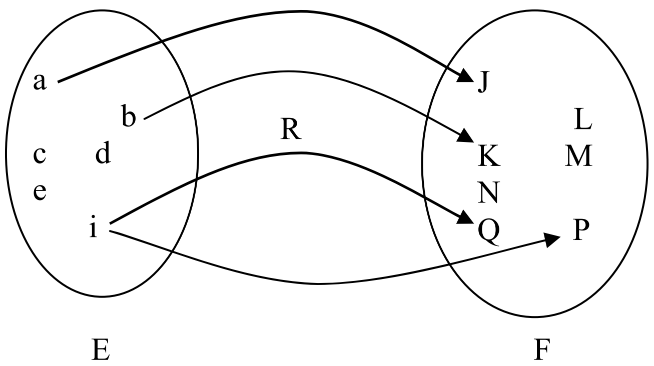
Objectif de la leçon 1 : Rappeler des définitions et des notions essentielles à la compréhension des leçons suivantes et des mathématiques en général.
Ce vocabulaire a déjà été vu en lycée et cette leçon n'est constituée que de rappels.
Ainsi cette leçon revisite les notions de :
Fonction, ensemble de départ, ensemble d'arrivée, image, antécédent, variable, argument, ensemble de définition, ensemble image, graphe, représentation graphique, application, injection, surjection, bijection, fonction réciproque et composition de fonctions.

Avertissement : Dans le langage courant le mot fonction est synonyme de correspondance et de mise en relation (la réussite d'un étudiant est fonction de son travail).
En mathématique le mot fonction est plus restrictif, c'est un cas particulier de relation (ou de correspondance)

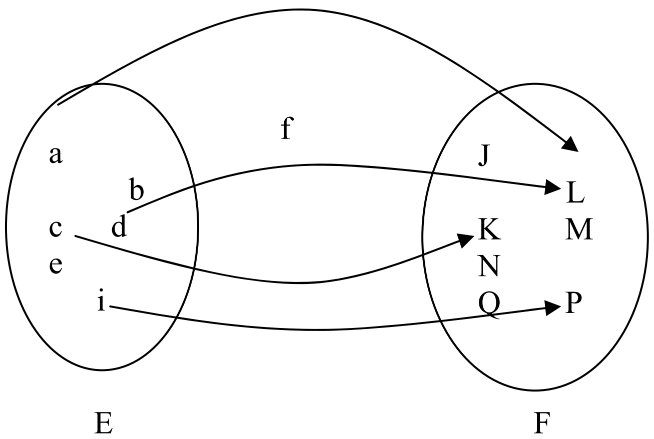
1. Notion de fonction - Définitions

1.1. Fonction

Définition : Une correspondance f d'un ensemble de départ **E** vers un ensemble d'arrivée **F** est une **fonction** si elle associe à tout élément de **E**, <u>au plus</u> un élément de **F**.



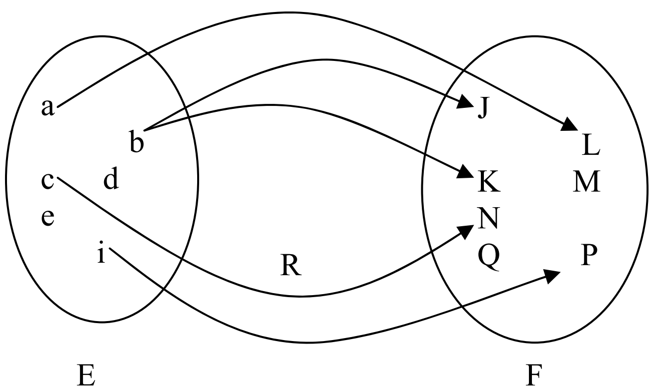
R n'est pas une fonction



f est une fonction de E vers F

1.2. Notations et vocabulaire

E est appelé ensemble de départ
F est appelé ensemble d'arrivée.



Ensemble de départ E

Ensemble d'arrivée F

On note $f : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$

$x \mapsto y = f(x)$

où x désigne un élément de **E** et y = f(x), l'élément de **F** que f lui fait correspondre.

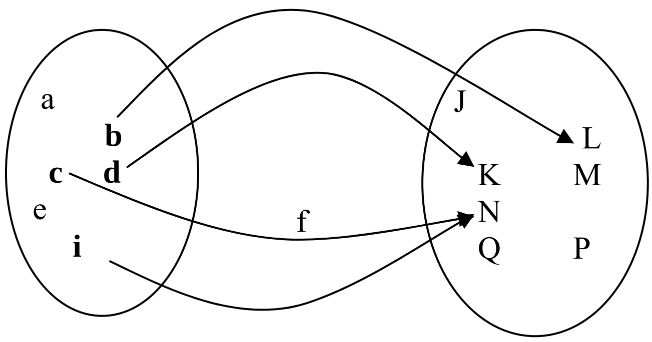
x est appelé **variable** ou **argument** de la fonction f.
f(x) est l'**image** ou le **transformé** de x par f, x est l'**antécédent** de y = f(x).

Attention : Ne pas confondre la fonction f (qui est une correspondance ou une relation) avec f(x) qui est un élément de l'ensemble d'arrivée F.

1.3. Ensemble de définition et ensemble image.

1.3.1. L'ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction f de E vers F est l'ensemble des éléments de **E** ayant une image dans **F**. On note souvent cet ensemble, **Df**.

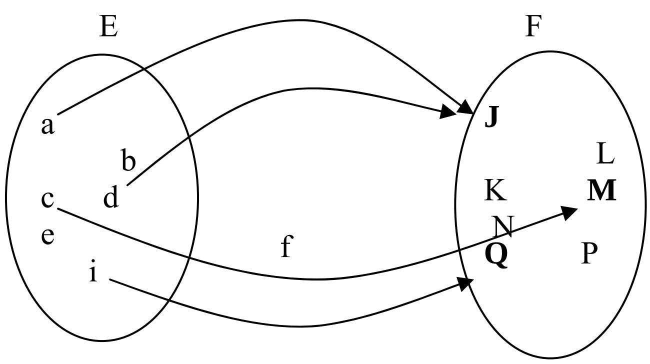


Ensemble de définition Df = {b , c , d , i}

1.3.2. L'ensemble image

L'ensemble image de **E** par f, est le sous-ensemble de **F** formé de toutes les images des éléments de **E**. On le note Im(f) ou f(**E**). On peut écrire :

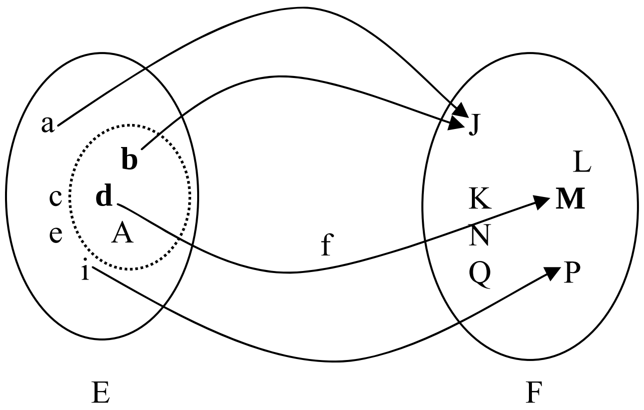
$$f(\mathbf{E}) = \{ y \in \mathbf{F} \ / \ \exists\, x \in \mathbf{E} \text{ , tel que } y = f(x) \}$$



Ensemble image f(E) = {J , M , Q}

Plus généralement, si **A** est un sous-ensemble de **E**, l'ensemble image de **A** par f est le sous-ensemble de **F** formé de toutes les images des éléments de **A**. On le note f(**A**). On peut écrire :

$$f(\mathbf{A}) = \{ y \in \mathbf{F} \ / \ \exists x \in \mathbf{A}\text{, tel que } y = f(x) \}$$

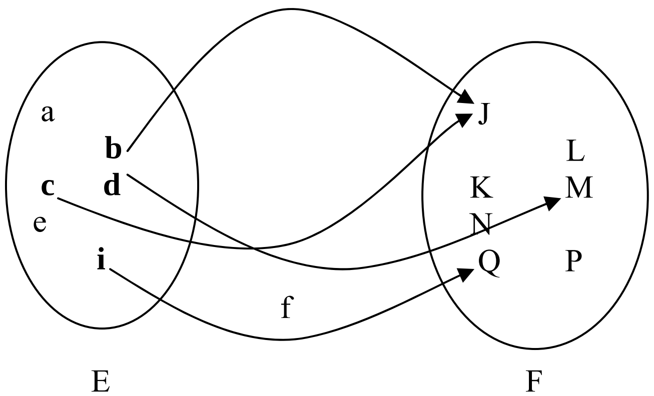


A = {b , d }, l'ensemble image de A est f(A) = {J , M}.

1.4. Graphe et représentation graphique d'une fonction

1.4.1. Le graphe d'une fonction

Le graphe d'une fonction f est l'ensemble des couples (x,f(x)) pour tous les éléments x de **E** ayant une image par f.



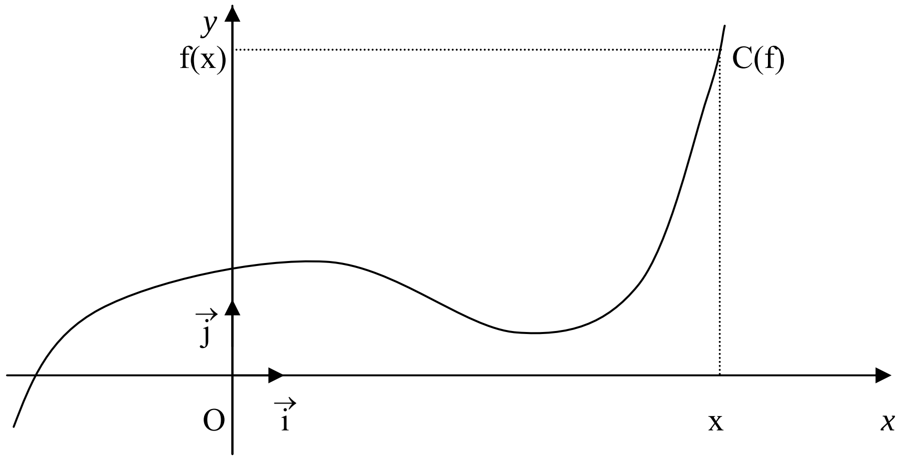
Le graphe de f est { (b,J) , (c,J) , (d,M) , (i,Q)}

1.4.2. Représentation graphique

1.4.2.1. Cas des fonctions de R dans R

On suppose le plan rapporté à un repère (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$). La **représentation graphique** d'une fonction f de **R** → **R** est l'ensemble des points du plan de coordonnées (x,f(x)) pour tous les éléments x de **R** ayant une image par f. Cette représentation graphique est une courbe, on la note C(f).

y = f(x) est l'équation de la représentation graphique de f



La représentation graphique permet de visualiser le graphe. A chaque couple (x,f(x)) du graphe correspond le point de coordonnées (x,f(x)) de la représentation graphique.

1.4.2.2. Cas des fonctions de R^2 dans R

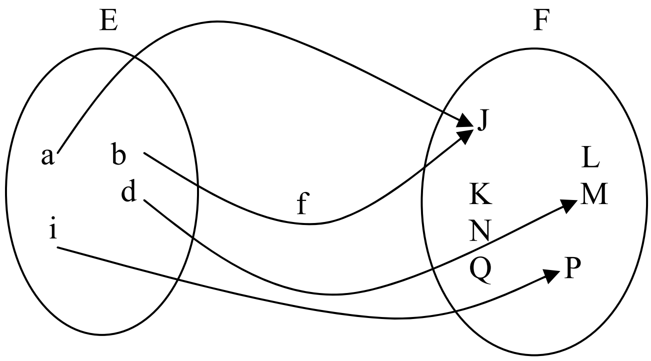
On considère la fonction f : $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$
$(x,y) \mapsto z = f(x,y)$

On suppose l'espace rapporté à un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). La représentation graphique de f est l'ensemble des points de l'espace de coordonnées (x,y,f(x,y)) pour tous les éléments (x,y) de $\mathbf{R}^2$ ayant une image par f. Cette représentation graphique est une surface, on la note **S(f).**

z = f(x,y) est l'équation de la surface représentant f

1.5. Application

Définition : On appelle **application** d'un ensemble **E** dans un ensemble **F**, une fonction telle que <u>tout</u> élément de **E** a une image dans **F**.



f est une application de {a , b , d , i} dans {J , K , L , M , N , P , Q}

Remarque : f est une application de **E** dans **F** si et seulement si Df = **E**.

2. Injection et surjection, bijection et fonction réciproque

2.1. Injection

Définition : Une **application** f de **E** dans **F** est **injective** si, dès que deux éléments de **E** sont distincts, leurs images par f sont distinctes. On dit aussi que f est une **injection**.

Cela peut s'écrire :

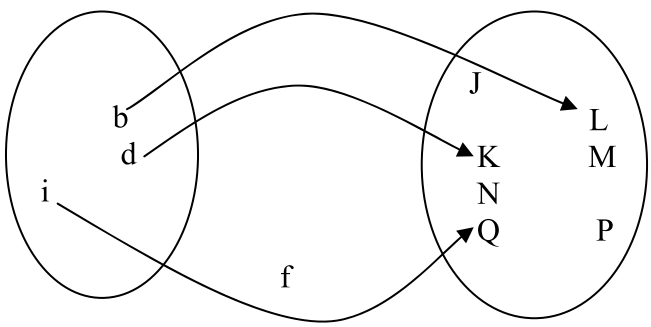
$$(x \neq x') \Rightarrow (f(x) \neq f(x'))$$

Cela peut aussi s'écrire :

$$(f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x').$$

On utilise souvent la dernière implication pour démontrer qu'une application est injective.

On peut aussi caractériser une injection de **E** dans **F** par une application dont tout élément de **F** admet au plus un antécédent dans **E**.



f est une injection de {b , d , i} dans {J , K , L , M , N , P , Q}

2.1.1. Cas des fonctions de R dans R

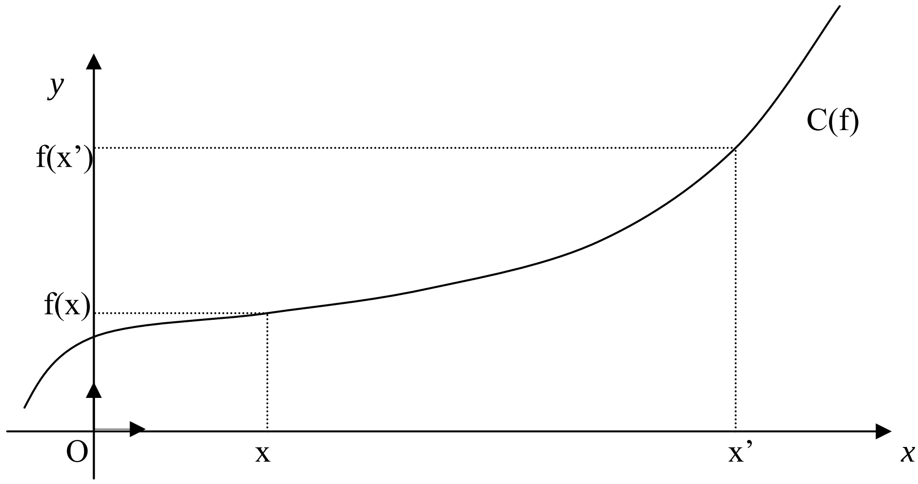
Définitions : Une fonction de **R** dans **R** est strictement croissante sur un sous ensemble **A** de Df si pour **tous** réels x et x' de **A** :

$$(x > x') \Rightarrow (f(x) > f(x')).$$

Une fonction de **R** dans **R** est strictement décroissante sur un sous ensemble **A** de Df si pour **tous** réels x et x' de **A** :

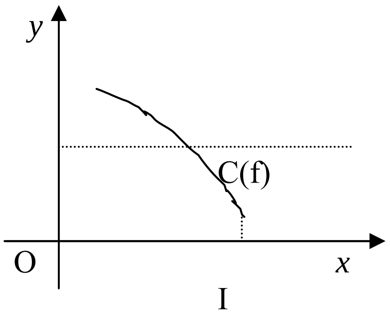
$$(x > x') \Rightarrow (f(x) < f(x')).$$

Une fonction de **R** dans **R** est strictement monotone sur un **A** si elle y est, soit strictement croissante, soit strictement décroissante.

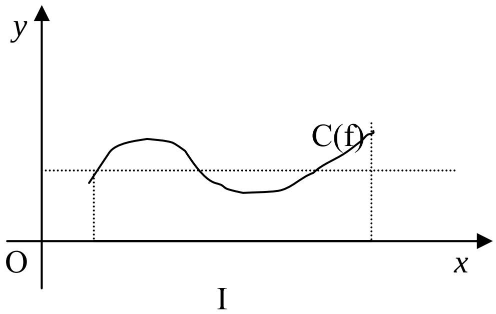


f est strictement croissante sur **R**

Propriété : Si une fonction de **R** dans **R** est strictement monotone sur un intervalle I de Df, c'est une injection sur I.



f est injective de I dans **R** (toute parallèle à (Ox) coupe C(f) au plus une fois)



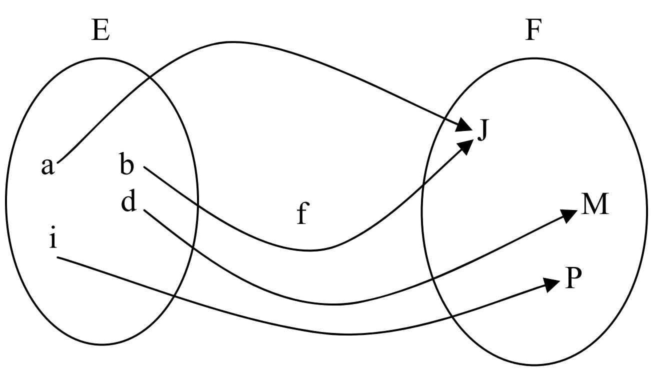
f n'est pas injective de I dans **R**.

2.2. Surjection

Définition : Une application f de E dans F est surjective, si tout élément y de F a au <u>moins un</u> antécédent x dans **E**. On dit aussi que f est une **surjection** de **E sur F**.
Cela peut s'écrire :

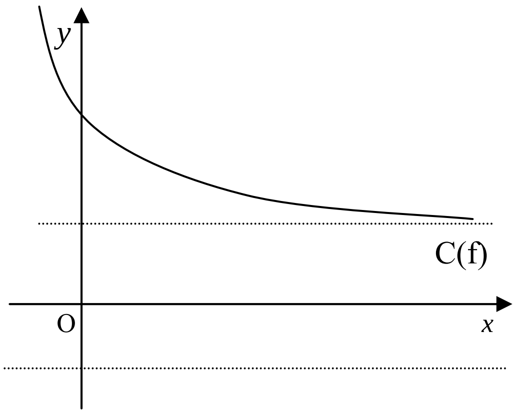
$$\forall y \in \mathbf{F},\ \exists x \in \mathbf{E} \ /\ y = f(x)$$

Remarque : Pour une application f :
(f est surjective) $\Leftrightarrow$ (Im(f)= f(**E**) = **F**).
Autrement dit f est surjective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée est atteint par f.

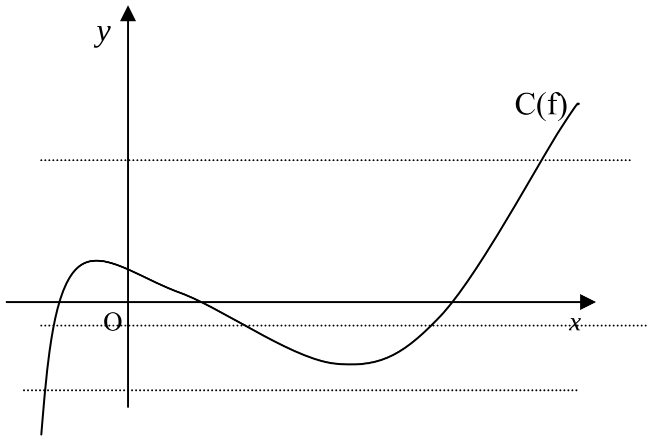


f est une surjection de {a , b , d , i} dans {J , M , P}

2.2.1. Cas des fonctions de R dans R



f n’est pas une surjection sur **R**



f est une surjection sur **R** (toute parallèle à (Ox) coupe au moins une fois C(f))

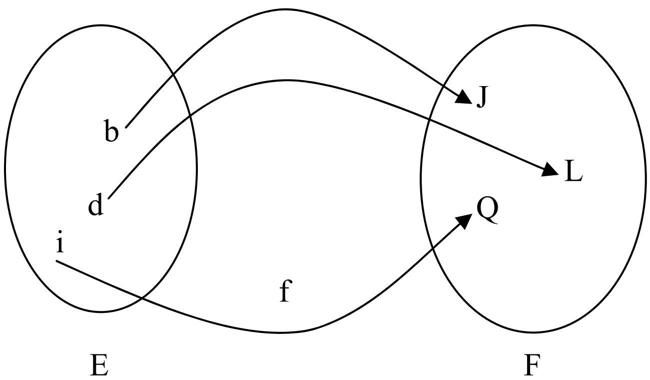
Vous aurez bien compris que : injection et surjection sont deux notions indépendantes. L’injection s’analyse sur l’ensemble de départ, alors que la surjection s’analyse sur l’ensemble d’arrivée.

2.3. Bijection

Définition : Une **application** f de **E** dans **F** est **bijective**, si <u>tout</u> élément y de **F** a un antécédent x <u>unique</u> dans **E**. On dit aussi que f est une **bijection** de **E sur F**.

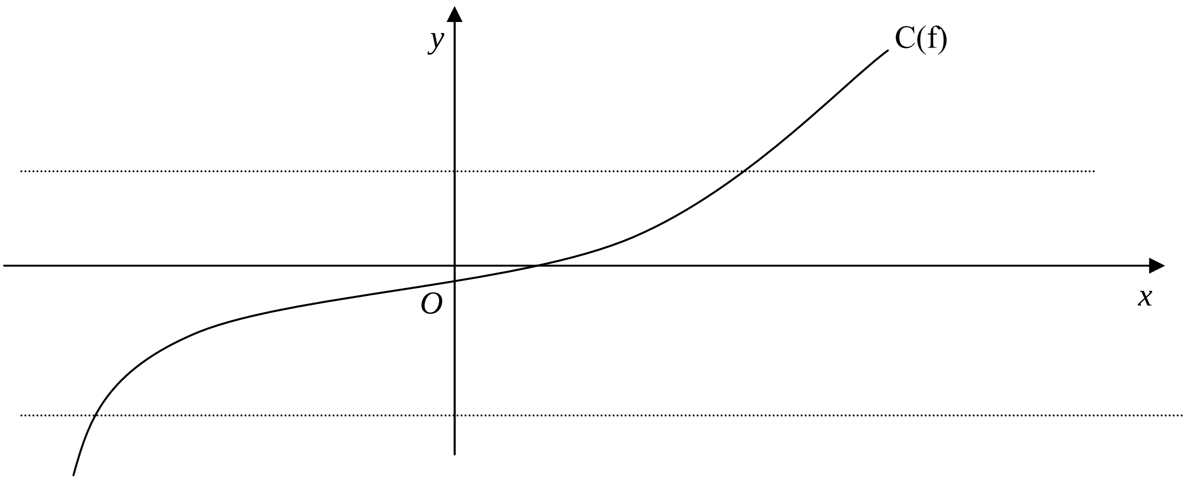
Cela peut s’écrire : :

$$\forall y \in \mathbf{F}, \exists ! x \in \mathbf{E} \ / \ y = f(x)$$



f est une bijection de E = {b , d , i} dans F = {J , L , Q}

2.3.1. Cas des fonctions de R dans R



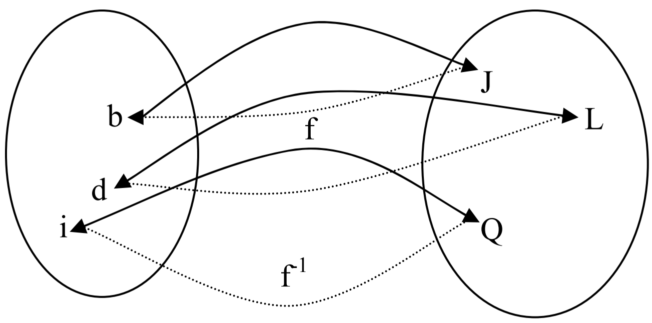
f est une bijection de **R** dans **R** (toute parallèle à (Ox) coupe C(f) exactement une fois)

2.4 Fonction réciproque

Définition : Si f est une bijection de **E** dans **F**, à tout élément y de **F**, on peut faire correspondre un unique élément x de **E** tel que y = f(x). On définit ainsi une nouvelle application de **F** dans **E**, appelée **fonction réciproque** de f et notée f^{-1}. f^{-1} est alors une bijection qui, à tout élément y de **F**, associe $x = f^{-1}(y)$ de **E**.

On peut écrire :

$$(y = f(x)) \Leftrightarrow (x = f^{-1}(y))$$



f est une bijection de {b , d , i} dans {J , L , Q} ( )
f^{-1} est une bijection de {J , L , Q} dans { b , d , i}( )

Attention: Ne pas confondre f^{-1} qui est la fonction réciproque et 1/f qui est l'inverse de la fonction f . Ces deux fonctions se notent parfois de la même façon.

2.4.1. Méthode

Soit f une fonction de **E** vers **F**.
Ainsi pour déterminer la fonction réciproque de f, on est amené à chercher les antécédents des éléments de l'ensemble d'arrivée.

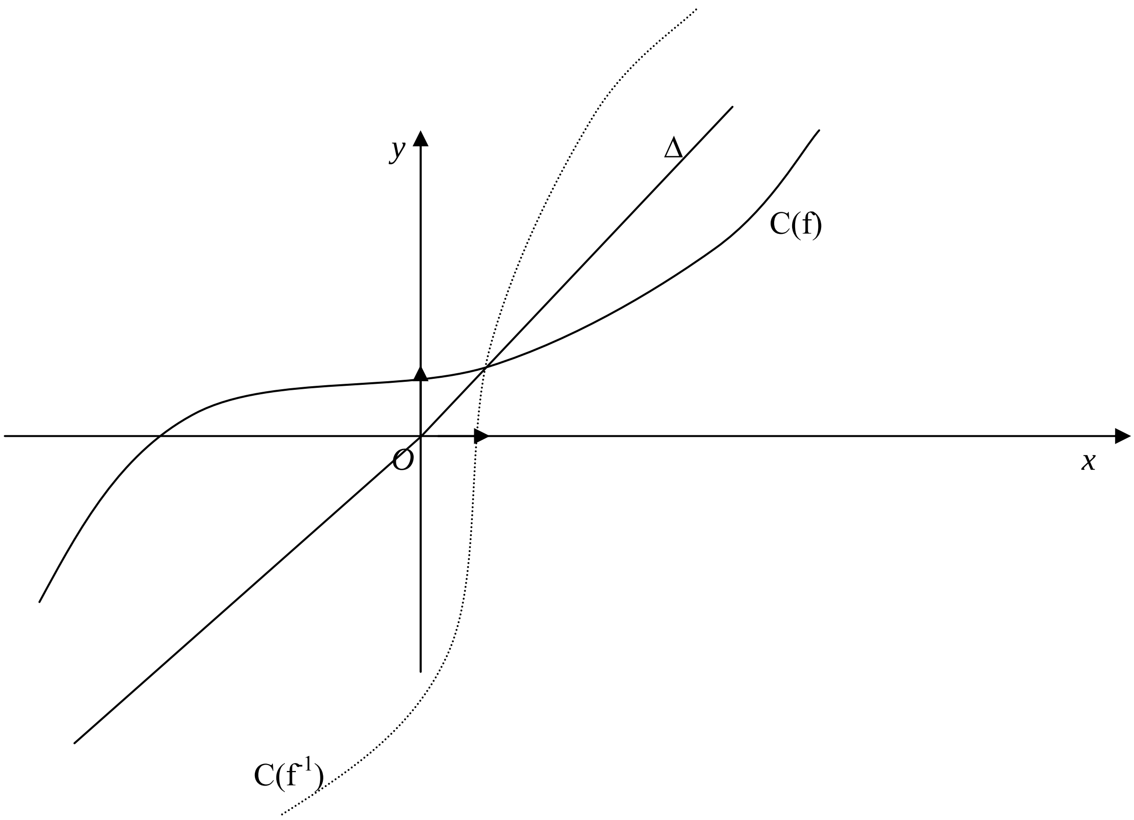
Il faut donc résoudre l'équation y = f(x).

On détermine d'abord les ensembles sur lesquels cette équation a exactement une solution (c'est à dire les ensembles sur lesquels f est une bijection).
Ensuite on exprime x en fonction de y, c'est cette fonction qui est f^{-1}.
On a alors $x = f^{-1}(y)$.

2.4.2. Cas particulier E = F

Les ensembles de départ et d'arrivée sont les mêmes (**E** = **F**), f est donc une fonction de **E** dans **E**.
x et y désignent des éléments du même ensemble, on a alors plutôt l'habitude d'appeler x la variable et y son image. Le nom de la variable important peu, on ne change pas la fonction en appelant x la variable et y son transformé, on obtient alors $y = f^{-1}(x)$.

Propriété : En **repère orthonormé** les représentations graphiques de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite Δ d'équation y = x)**.**



3. Composition des fonctions

3.1. Composition d'applications

Définition : Soit f une application de **E** dans **F**, et g une application de **F** dans **G**, on appelle **application composée** de f et g, l'application qui à tout élément x de **E** fait correspondre l'élément g(f(x)) de **G**.
On note $g(f(x)) = g \circ f(x)$ et on dit « f rond g ».

$$\begin{tikzcd} & y = f(x) \in F \arrow[dr] & \\ x \in E \arrow[ur, "f"] \arrow[rr] & & g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) \in G \end{tikzcd}$$

3.2. Composition de fonctions

On peut aussi définir $g \circ f$ si f et g sont des fonctions, mais il faut alors que l'ensemble image de f soit inclus dans l'ensemble de définition de g.
Si g est une application de f(Df) dans **G**, $g \circ f$ sera alors une fonction composée, ayant même ensemble de définition que f.

3.3. Non commutativité de la composition des fonctions

Attention la composition des fonctions n'est pas commutative ; en général

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

En effet pour pouvoir définir gof, il faut que l'ensemble de départ **F** de g contienne f(**E**), et pour pouvoir définir fog, il faut que l'ensemble de départ **E** de f contienne g(**F**).
Or ce n'est pas parce que l'ensemble de départ **E** de f contient g(**F**), qu'automatiquement l'ensemble de départ **F** de g contient f(**E**).

Par exemple si g est une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$ et si f est une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^3$, on peut définir fog mais pas gof.

Et même si on peut définir fog et gof, ces deux fonctions sont en général distinctes.

3.4. Cas particulier de la fonction réciproque

On se propose de composer f et f^{-1}. C'est toujours possible et on obtient toujours le même résultat : $fof^{-1} = f^{-1}of = I$ (I est l'application identique qui à x fait correspondre x, sa représentation graphique est la droite Δ d'équation $y = x$)

3.5 Composée n fois (uniquement pour les fonctions de E dans E)

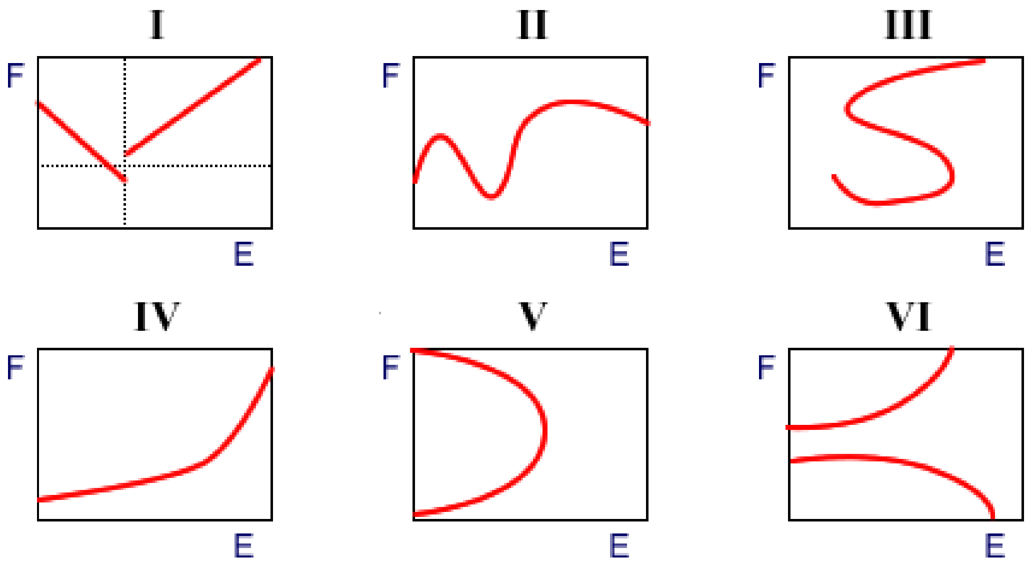
On note f^n la fonction fofof….of (f composée n fois).

Attention: Ne pas confondre f^n = fonction fofof….of (f composée n fois) et la puissance $n^{\text{ième}}$ de f, $f^n = f \times f \times \ldots \times f$ (n produits).

Exercices

Exercice 1

E x F est représenté par un rectangle, chaque côté représentant l'un des deux ensembles.
Parmi les relations représentées ci-dessous lesquelles sont des fonctions de E dans F ? Lesquelles sont des fonctions de F dans E ? Indiquer leur domaine de définition. Parmi ces fonctions, lesquelles sont injectives ? Lesquelles sont surjectives ?



Exercice 2

Parmi les relations suivantes, lesquelles définissent des fonctions, des applications, lesquelles sont injectives? Si la relation est une fonction, définir si possible l'ensemble d'arrivée pour que la fonction soit une surjection.

R_1 : à un étudiant « e » de l'université X, on fait correspondre l'année « a » dans laquelle il est inscrit. $R_1 : e \rightarrow a$.

R_2 : à un étudiant « e » de l'université X, on fait correspondre ses diplômes « d ».
$R_2 : e \rightarrow d$.

R_3 : à un employé « e » de l'entreprise Y, on associe son supérieur hiérarchique direct.
« s ». $R_3 : e \rightarrow s$.

R_4 : à un employé « e » de l'entreprise Y, on associe le nombre « n » d'enfants de « e ».
$R_4 : e \rightarrow n$.

Exercice 3 (droite de budget)

Un individu dispose de 1000 F, il peut acheter 2 biens de prix respectif p_1 et p_2. Soit x la quantité achetée du premier bien et y la quantité achetée du second bien.
1) Quelle relation lie x et y si l'individu consomme tout son budget?
2) y est-il fonction de x? x est-il fonction de y? Si oui de quelles fonctions s'agit-il?
3) Représenter les graphes correspondants (cas particulier, p_1=150F, p_2=100F):

Exercice 4

Soient les fonctions de N dans N définies par les tables suivantes:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
f(x)	2	4	1	3	5	9	10	6	7	8	16	13	15	14	11	12	18	17

x	1	2	3		5	6	7	8	9	10		12	13	14	15	16	17	18
g(x)	2	1	4	1	11	10	17	0	3	6	1	5	9	11	2	4	1	2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
h(x)	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

a) Indiquer leur domaine de définition.
b) Parmi ces fonctions lesquelles sont injectives?
c) Pour chacune de ces fonctions indiquer comment doit être défini le domaine d'arrivée pour que la fonction soit surjective.
d) Lesquelles de ces fonctions admettent une fonction réciproque? la définir.
e) Définir $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ h$, $h\circ f$, $h\circ f\circ g$ et préciser pour chaque fonction son domaine de définition.

Exercice 5

Voici 4 fonctions de R dans R.
a) Indiquer leur domaine de définition.
b) Quelles sont celles qui sont injectives? celles qui sont surjectives? celles qui sont bijectives?
c) Comment peut-on les rendre bijectives?

$f(x) = x^2 - 4$

$g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

$h(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

Exercice 6

Q désigne une quantité produite, K le capital mobilisé et L le travail utilisé.
La fonction de production est définie par $Q = f(K, L) = K^{1/2}L^{1/4}$

1) On considère Q comme fonction de la seule variable K, (L étant considéré comme un paramètre fixé).
Quelle est sa fonction réciproque. (Comment le capital varie-t-il en fonction de la production ?)
2) On considère Q comme fonction de la seule variable L, (K étant considéré comme un paramètre fixé).
Quelle est sa fonction réciproque.(Comment le travail varie-t-il en fonction de la production ?)

Exercice 7 : Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes.

1) $x \to \dfrac{x^2+2}{2x^2-3x+1}$ 2) $x \to \sqrt{2x^2-3x+1}$ 3) $x \to \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+1}}$

4) $x \to \dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1}}$ 5) $x \to \ln\dfrac{2x^2-3x+1}{2-x}$ 6) $x \to (2x-1)^m \ m \in Z$

7) $x \to x^x$.

Exercice 8 : Soit f la fonction de R dans R définie par $f(x) = 2|x-1| + |2x+1| - |x|$.

1) Calculer f(0), $f(-\frac{2}{3})$ et $f(\frac{4}{3})$. f est-elle injective ?

2) Exprimer f(x) sans les valeurs absolues suivant les valeurs de x (on rappelle que $|A(x)| = A(x)$ si $A(x) \geq 0$ et $|A(x)| = -A(x)$ si $A(x) \leq 0$). On pourra établir les résultats à l'aide d'un tableau.

3) Faire une représentation graphique de f.

4) Déterminer Im(f). Trouver le ou les antécédents de 5. f est-elle surjective ?

5) Déterminer A et B tels que f soit une bijection de A dans B. Déterminer alors f^{-1}.

Exercice 9 : Soit E(x) la partie entière de x, c'est à dire l'entier immédiatement inférieur ou égal à x.

On a : $E(x) \in N$ et $E(x) \leq x \leq E(x) + 1$.

1) Faire la représentation graphique des fonctions f et g définies par

$f(x) = x - E(x)$ et $g(x) = 2x - E(x-1)$

2) Ces fonctions sont-elles injectives ? surjectives ?

3) Si non, pour chacune des fonctions, déterminer A et B telle que la fonction soit une bijection de A sur B.

Exercice 10 : Soit $f : [-5 ; 0] \to R$

$$x \to x^2 - 1.$$

1) f est-elle injective ? Surjective ?

2) Déterminer B tel que f soit une bijection de [-5 ; 0] dans B. Déterminer alors f^{-1}. Faire les représentations graphiques de f et f^{-1}.

Exercice 11 : Soit $f : x \to \frac{4}{x^2} + 1$. Déterminer A et B tels que f soit une bijection de A sur B. Déterminer alors f^{-1}.

Exercice 12 : Montrer que si f est une bijection croissante (respectivement décroissante) de A sur B, f^{-1} est une bijection croissante (respectivement décroissante) de B sur A.

Exercice 13 : Déterminer gof et fog, ainsi que leur ensemble de définition, dans les deux cas suivants

1) $f : x \to \sqrt{x+1}$ $\qquad g : x \to \sqrt{x^2 - x - 2}$.

2) $f : x \to \frac{x+1}{x-1}$ $\qquad g : x \to \frac{2}{x}$

Exercice 14 : Soit $f\ x \to \frac{2x+1}{x-1}$, calculer $f^4(x) = fofofof(x)$, ainsi que son ensemble de définition.