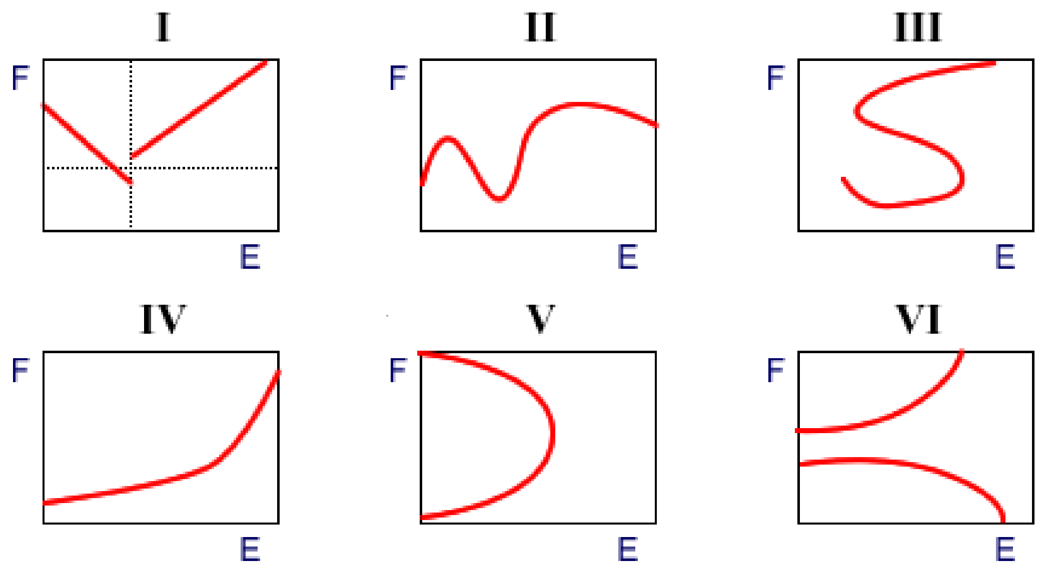
Leçon 01- Exercices

Exercice 1

E x F est représenté par un rectangle, chaque côté représentant l'un des deux ensembles. Parmi les relations représentées ci-dessous lesquelles sont des fonctions de E dans F ? Lesquelles sont des fonctions de F dans E ? Indiquer leur domaine de définition. Parmi ces fonctions, lesquelles sont injectives ? Lesquelles sont surjectives ?



Exercice 2 :

Parmi les relations suivantes, lesquelles définissent des fonctions, des applications, lesquelles sont injectives? Si la relation est une fonction, définir si possible l'ensemble d'arrivée pour que la fonction soit une surjection.

R_1 : à un étudiant « e » de l'université X, on fait correspondre l'année « a » dans laquelle il est inscrit. R_1 : e $\rightarrow$ a.

R_2 : à un étudiant « e » de l'université X, on fait correspondre ses diplômes « d ».
R_2 : e$\rightarrow$d.

R_3 : à un employé « e » de l'entreprise Y, on associe son supérieur hiérarchique direct. « s ». R_3 : e$\rightarrow$s.

R_4 : à un employé « e » de l'entreprise Y, on associe le nombre « n » d'enfants de « e ».
R_4 : e$\rightarrow$n.

Exercice 3 (droite de budget)

Un individu dispose de 1000 F, il peut acheter 2 biens de prix respectif p_1 et p_2. Soit x la quantité achetée du premier bien et y la quantité achetée du second bien.
1) Quelle relation lie x et y si l'individu consomme tout son budget?
2) y est-il fonction de x? x est-il fonction de y? Si oui de quelles fonctions s'agit-il?
3) Représenter les graphes correspondants (cas particulier, p_1=150F, p_2=100F):

Exercice 4

Soient les fonctions de **N** dans **N** définies par les tables suivantes:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
f(x)	2	4	1	3	5	9	10	6	7	8	16	13	15	14	11	12	18	17

x	1	2	3		5	6	7	8	9	10		12	13	14	15	16	17	18
g(x)	2	1	4	1	11	10	17	0	3	6	1	5	9	11	2	4	1	2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
h(x)	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

a) Indiquer leur domaine de définition.
b) Parmi ces fonctions lesquelles sont injectives?
c) Pour chacune de ces fonctions indiquer comment doit être défini le domaine d'arrivée pour que la fonction soit surjective.
d) Lesquelles de ces fonctions admettent une fonction réciproque? la définir.
e) Définir $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$, $h \circ f$, $h \circ f \circ g$ et préciser pour chaque fonction son domaine de définition.

Exercice 5

Voici 4 fonctions de **R** dans **R**.
a) Indiquer leur domaine de définition.
b) Quelles sont celles qui sont injectives? celles qui sont surjectives? celles qui sont bijectives?
c) Comment peut-on les rendre bijectives?

$$f(x) = x^2 - 4$$

$$g(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 3}$$

Exercice 6

Q désigne une quantité produite, K le capital mobilisé et L le travail utilisé.

La fonction de production est définie par $Q = f(K, L) = K^{1/2}L^{1/4}$

1) On considère Q comme fonction de la seule variable K, (L étant considéré comme un paramètre fixé).
Quelle est sa fonction réciproque. (Comment le capital varie-t-il en fonction de la production ?)
2) On considère Q comme fonction de la seule variable L, (K étant considéré comme un paramètre fixé).
Quelle est sa fonction réciproque.(Comment le travail varie-t-il en fonction de la production ?)

Exercice 7 : Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes.

1) $x \to \dfrac{x^2 + 2}{2x^2 - 3x + 1}$ 2) $x \to \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$ 3) $x \to \sqrt{\dfrac{2x - 1}{x + 1}}$

4) $x \to \dfrac{\sqrt{2x - 1}}{\sqrt{x + 1}}$ 5) $x \to \ln \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2 - x}$ 6) $x \to (2x - 1)^m$ $m \in \mathbb{Z}$

7) $x \to x^x$.

Exercice 8 : Soit f la fonction de **R** dans **R** définie par $f(x) = 2|x - 1| + |2x + 1| - |x|$.

1) Calculer $f(0)$, $f(-\frac{2}{3})$ et $f(\frac{4}{3})$. f est-elle injective ?

2) Exprimer f(x) sans les valeurs absolues suivant les valeurs de x (on rappelle que $|A(x)| = A(x)$ si $A(x) \geq 0$ et $|A(x)| = -A(x)$ si $A(x) \leq 0$). On pourra établir les résultats à l'aide d'un tableau.

3) Faire une représentation graphique de f.

4) Déterminer Im(f). Trouver le ou les antécédents de 5. f est-elle surjective ?

5) Déterminer **A** et **B** tels que f soit une bijection de **A** dans **B**. Déterminer alors f^{-1}.

Exercice 9 : Soit E(x) la partie entière de x, c'est à dire l'entier immédiatement inférieur ou égal à x.
On a : $E(x) \in \mathbb{N}$ et $E(x) \leq x \leq E(x) + 1$.
1) Faire la représentation graphique des fonctions f et g définies par
$f(x) = x - E(x)$ et $g(x) = 2x - E(x-1)$

2) Ces fonctions sont-elles injectives ? surjectives ?

3) Si non, pour chacune des fonctions, déterminer **A** et **B** telle que la fonction soit une bijection de **A** sur **B**.

Exercice 10 : Soit $f : [-5 ; 0] \to \mathbb{R}$
$x \to x^2 - 1$.

1) f est-elle injective ? Surjective ?

2) Déterminer **B** tel que f soit une bijection de [-5 ; 0] dans **B**. Déterminer alors f^{-1}. Faire les représentations graphiques de f et f^{-1}.

Exercice 11 : Soit $f : x \to \dfrac{4}{x^2} + 1$. Déterminer **A** et **B** tels que f soit une bijection de **A** sur **B**.
Déterminer alors f^{-1}.

Exercice 12 : Montrer que si f est une bijection croissante (respectivement décroissante) de **A** sur **B**, f^{-1} est une bijection croissante (respectivement décroissante) de **B** sur **A**.

Exercice 13 : Déterminer gof et fog, ainsi que leur ensemble de définition, dans les deux cas suivants

1) $f : x \to \sqrt{x+1}$ $\qquad g : x \to \sqrt{x^2 - x - 2}$.

2) $f : x \to \dfrac{x+1}{x-1}$ $\qquad g : x \to \dfrac{2}{x}$

Exercice 14 : Soit f $x \to \dfrac{2x+1}{x-1}$, calculer $f^4(x) = f\circ f\circ f\circ f(x)$, ainsi que son ensemble de définition.