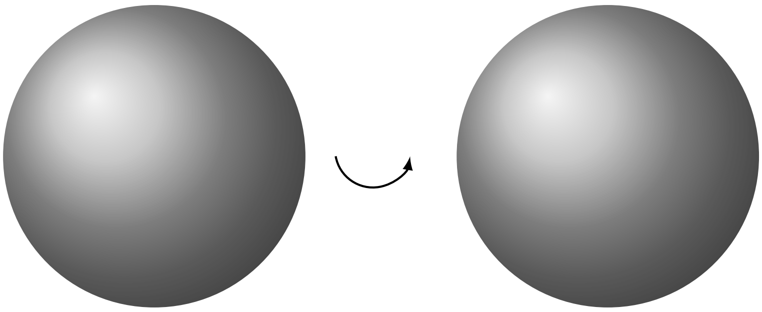
Symétries

Les symétries et les invariances forment la base de la physique moderne. Dans cette section, nous verrons comment les principes de symétries peuvent grandement simplifier les questions physiques.

1 Invariances

Imaginez une boule **parfaitement** sphérique, complètement **uniforme**, tant en terme de densité, de couleur, de distribution de charge, de goût, etc [1]. Si vous la tournez, alors vous n'aurez pas moyen de le savoir, puisque une fois tournée, la boule aura exactement la même apparence qu'avant [2].



Une sphère parfaite — La même sphère tournée de $\pi/3$

De même si cette boule agit sur vous (via une force de gravité, ou via une force électrique par exemple), cette action sera forcément la même si vous tournez autour. Puisque si la boule est parfaitement sphérique, rien n'aura changé quand vous vous serez déplacé.
Ce principe fondamental est énoncé sous le terme d'invariance. Nous allons l'énoncer dans le cas particulier des champs électriques.

Théorème 1.1 — Invariance des sources.
Si une distribution de charge est **invariante** par un changement de variable, alors le champ électrostatique qu'elle produit ne peut pas dépendre de cette variable.

R Ce principe est vrai pour les champs électriques, mais il l'est aussi pour toute autre effet mesurable.

■ **Exemple 1.1 — Champ créé par une boule.**
Une boule est chargée uniformément. Cette boule crée un champ électrostatique qui *a priori* s'écrit en coordonnées sphérique :

$$\vec{E} = \vec{E}(r, \theta, \phi)$$

Mais elle est parfaitement sphérique. Par conséquent, elle reste invariante par rotation selon ϕ et θ.
On en déduit que $\vec{E}$ ne peut dépendre que de r.

$$\vec{E} = \vec{E}(r, \cancel{\theta}, \cancel{\phi}) = \vec{E}(r)$$

Si ce n'était pas le cas, c'est à dire si le champ dépendait de θ, cela signifierait que la boule exercerait un effet différent sur un point pour lequel $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$ par exemple. Ceci suggère que l'on pourrait faire la différence entre deux orientations de la boule, ce qui n'est

1. Évidemment, une telle chose n'existe pas à notre échelle
2. Plus exactement, vous n'aurez pas moyen de faire une mesure qui met en évidence le fait que la boule a tourné.

pas possible puisqu'elle est parfaitement sphérique... Cela marche en particulier pour une charge uniforme. On peut casser l'invariance avec une distribution de charge qui n'est pas invariante sur l'une des rotations (θ ou ϕ). La terre par exemple, n'est pas parfaitement à symétrie sphérique du fait de la présence de relief, montagne et autre petits détails.
On remarquera par exemple qu'une charge ponctuelle est invariante par rotation selon ϕ et θ et effectivement le champ qu'elle crée ne dépend que de r :

$$\vec{E}(r) = k\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$$

■

■ **Exemple 1.2 — Champ créé par un fil infini.**
On se place en coordonnées cartésiennes.
Un fil infini aligné selon l'axe Z, est invariant par translation selon Z (si on translate le fil sur Z il reste identique) donc :

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, \cancel{z}) = \vec{E}(x, y)$$

Et si on se place en coordonnées cylindriques :
Le champ est aussi invariant par rotation (θ) autour de l'axe Z (si on tourne le fil sur lui même il reste identique). Par conséquent, le champ qu'il créé ne peut dépendre que de r :

$$\vec{E} = \vec{E}(r, \cancel{\theta}, \cancel{z}) = \vec{E}(r)$$

Effectivement $\vec{E}$ dans ce cas ne dépend que de r puisque :

$$\vec{E}_{\text{fil rectiligne infini}} = 2k\frac{\lambda}{r}\vec{u}_r$$

■

2 Symétries

Relié au phénomène d'invariance, le **principe de symétrie** permet également des simplifications.

Théorème 2.1 — Principe de symétrie.
Supposons qu'une distribution de charge possède un plan de symétrie. Alors le champ qu'elle crée en n'importe quel point de ce plan est nécessairement inclus dans ce plan.

R Encore une fois, ce principe est bien plus général, si un système possède un plan de symétrie, alors n'importe quel effet directionnel (vecteur) qu'il produit sera inclus dans ce plan[3].

■ **Exemple 2.1 — Champ créé par un fil infini.**
Un fil infini, **uniformément** chargé coïncide avec l'axe (OZ) des coordonnées cylindriques (r, θ, z).
Pour n'importe quel point $P \in$ fil, le plan $(P, \vec{u}_z, \vec{u}_r)$ est plan de symétrie de la source, donc $\vec{E}$ est inclus dans ce plan, c'est à dire que la composante selon $\vec{u}_\theta$ est forcément nulle.

3. Même si ce principe semble être violé par le champ magnétique, il faut bien se rendre compte que le champ magnétique n'est mesurable qu'à travers les effets qu'il produit, et ces effets sont bien toujours dans le plan de symétrie (cela est dû au fait que le champ magnétique est une construction mathématique qui utilise un arbitraire : le produit vectoriel).

Comme le fil est infini, le plan $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est aussi plan de symétrie de la source, la composante selon $\vec{u}_z$ est donc nulle également. On en déduit que :

$$\vec{E}(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} E_r(r,\theta,z) \\ E_\theta(r,\theta,z) \\ E_z(r,\theta,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r(r,\theta,z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec en plus les arguments d'invariances vus au dessus, on a :

$$\vec{E}(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} E_r(r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui est effectivement le cas puisque :

$$\vec{E}_{fil} = 2k\frac{\lambda}{r}\vec{u}_r = \begin{pmatrix} 2k\frac{\lambda}{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$