INSA TOULOUSE

Cinématique Du Solide

RECUEIL DE TRAVAUX DIRIGES

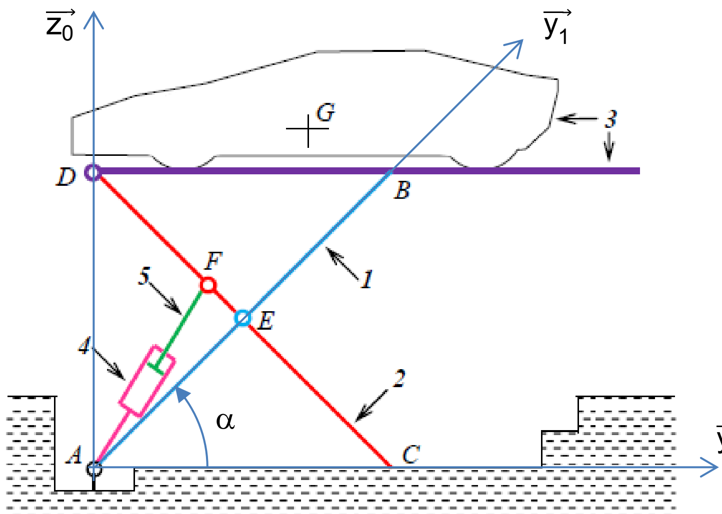
Pierre STEPHAN
pierre.stephan@univ-tlse2.fr

CHAINES OUVERTES – CALCUL DIRECT

Exercice 1 : Pont élévateur

Le support d'étude est un pont élévateur d'une station-service dont le modèle est donné ci-dessous.
Le repère $R_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est le repère attaché au sol.

Le cadre (1) est en rotation autour de l'axe $(A,\vec{x_0})$ par rapport au sol et paramétré par l'angle α. Les longueurs (AE) et (EB) sont égales à L.
Le cadre (2) est articulé par rapport au cadre (1) autour de l'axe $(E,\vec{x_0})$. Les longueurs (EC) et (ED) sont égales à L et le contact est toujours maintenu avec le sol au point C.
(AC) est supposé horizontal suivant l'axe $\vec{y_0}$.
Une butée limite la hauteur (AD) de levage à H_{maxi}=1,34m
La valeur minimale de l'angle α est α_0=5°



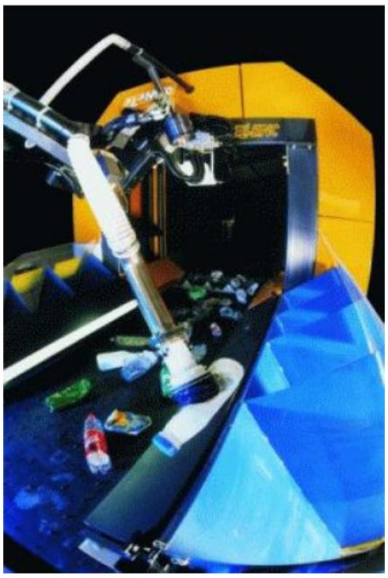
Le cahier des charges impose
- une vitesse de montée inférieur à 0,5m/s : V_M<0,5 m/s
- une vitesse de glissement en C inférieure à 0,1 m/s : V_{glis}<0,1 m/s

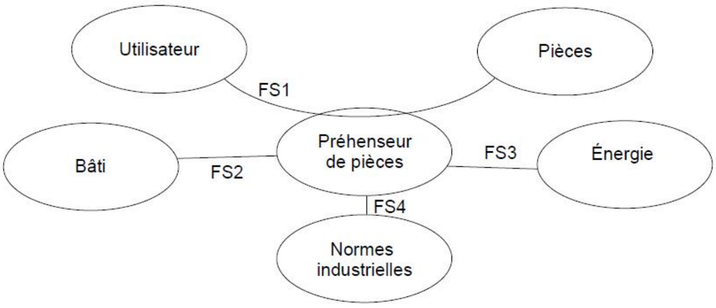
Objectif de l'étude : vérifier le cahier des charges lié à la vitesse de levée maximale

Question *:* La longueur L étant égale à 80cm, calculer analytiquement les vecteurs vitesse du point E, du point D et du point C par rapport à (0).
En déduire la valeur maximale de la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$

Exercice 2 : Préhenseur de pièces

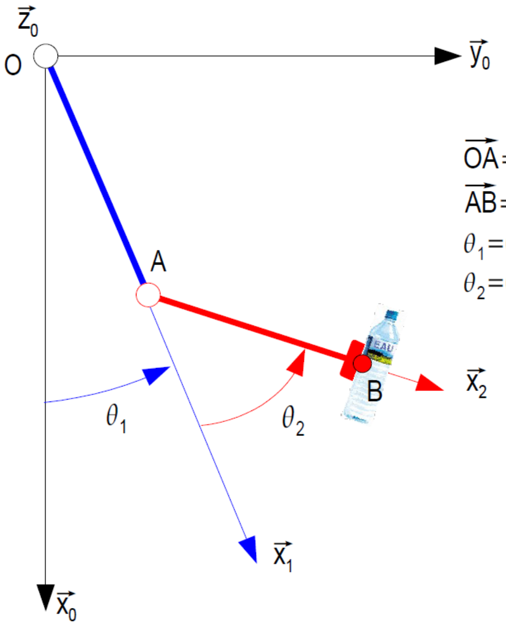
Le support d'étude est un préhenseur de pièces. Il permet à l'utilisateur de prendre des pièces pour les déplacer. L'application illustrée sur l'image ci-dessous et la prise de bouteilles plastiques sur un tapis roulant, afin de les trier pour faire du recyclage.





FS1 : permettre à l'utilisateur de prendre des pièces
FS2 : s'adapter au bâti
FS3 : s'adapter à l'énergie
FS4 : respecter les normes industrielles

Fonction	Critère	Niveau
FS1	Rapidité	$t_{5\%} < 0{,}2$ s
	Bande passante	$\omega_{3dB} > 15$ rad.s^{-1}
	Préhension des pièces	Aucune pièce relachée



$\overrightarrow{OA} = a\,\vec{x}_1$

$\overrightarrow{AB} = b\,\vec{x}_2$

$\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$

$\theta_2 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$

On donne le modèle du robot.

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est le repère attaché au sol.
$R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est le repère attaché au bras 1 du préhenseur.
$R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est le repère attaché au bras 2 du préhenseur.

Le bras 1 est en rotation d'axe $(O, \vec{z}_0)$ par rapport au bâti 0. On note θ_1 l'angle de rotation de R_1 par rapport à R_0. Le bras 2 est en rotation d'axe $(A, \vec{z}_0)$ par rapport au bras 1. On note θ_2 l'angle de rotation de R_2 par rapport à R_1.

Objectif de l'étude : vérifier le cahier des charges lié au maintien de la pièce

Le critère de préhension de pièces de la fonction FS1 peut ne pas être atteint si le préhenseur ne se déplace pas trop vite (sinon la bouteille est éjectée, car la dépression qui permet de la maintenir au bout du bras du préhenseur n'est plus suffisante pour contrer l'effet centrifuge qu'elle subit). Le critère de préhension est équivalent à un critère d'accélération maximale à vérifier : $\|\overrightarrow{a_{P,2/0}}\| \leq 60\,\text{m.s}^{-2}$

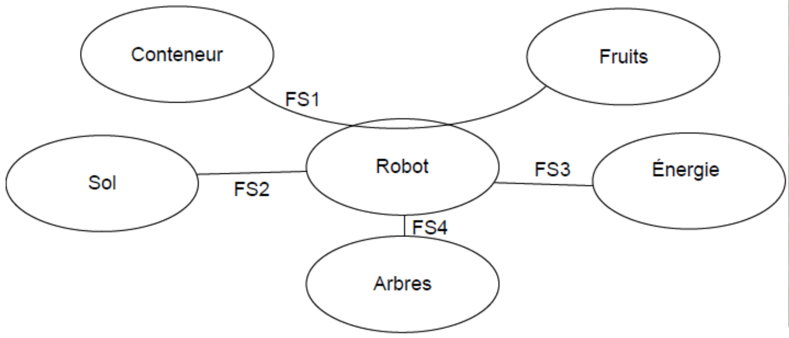
Question : Déterminer $\overrightarrow{V_{P,2/0}}$ dans le cas général par le calcul direct. Dans le cas où les mouvements s'effectuent à vitesse angulaires constantes ($\ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 = 0$), déterminer l'accélération du point P de 2/0.

Calculer la valeur numérique de $\|\overrightarrow{a_{P,2/0}}\|$.
a = 40 cm, b = 40 cm, $\dot{\theta}_1 = 8$ rad.s^{-1}, $\ddot{\theta}_1 = 0$ rad.s^{-2}, $\theta_2 = 0$ rad, $\dot{\theta}_2 = 0$ rad.s^{-1} et $\ddot{\theta}_2 = 0$ rad.s^{-2}.

Conclure quant à la capacité du préhenseur à satisfaire le critère de préhension de la fonction FS1.

Exercice 3 : Robot ramasseur de fruits

On étudie un robot ramasseur de fruits. Il permet à un agriculteur de cueillir, de manière automatique, les fruits mûrs dans les arbres, et de les mettre dans un conteneur spécifique.

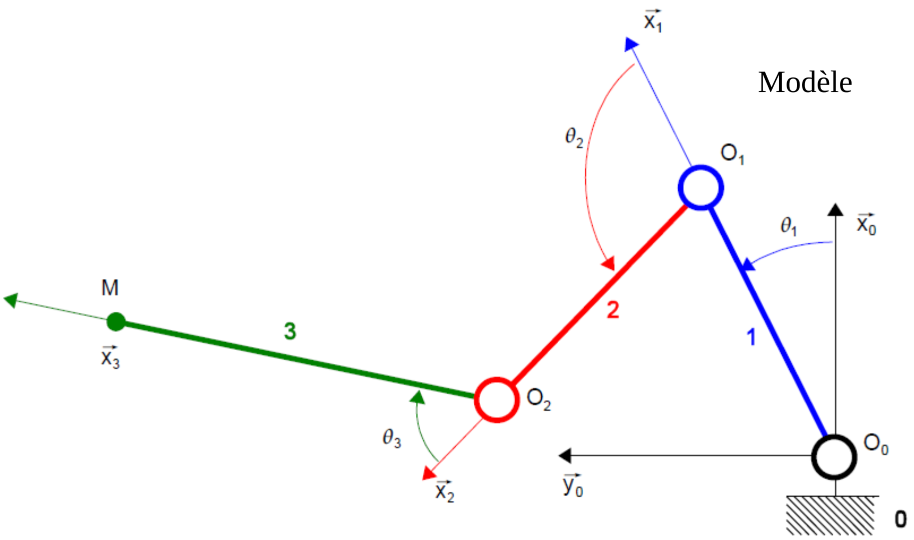


FS1 : cueillir les fruits et les mettre dansle conteneur
FS2 : s'adapter au sol
FS3 : s'adapter à l'énergie
FS4 : ne pas abimer les arbres

Fonction	Critère	Niveau
FS1	...	...
	Vitesse d'approche du fruit	< 3 cm/s

Le bras 1 tourne autour de l'axe (O_0, $\vec{z}_0$) par rapport au bâti 0. Le bras 2 tourne autour de l'axe (O_1, $\vec{z}_0$) par rapport à 1. Le bras 3 tourne autour de l'axe (O_2, $\vec{z}_0$) par rapport à 2. On pose :

$$\overrightarrow{O_0O_1} = R.\vec{x}_1$$
$$\overrightarrow{O_1O_2} = R.\vec{x}_2$$
$$\overrightarrow{O_2M} = L.\vec{x}_3$$



Objectif de l'étude : vérifier le cahier des charges lié à l'approche du fruit

***Question** :* Déterminer $\overrightarrow{V_{M,3/0}}$.

Dans la configuration de rapprochement horizontal, ($\theta_2 = \pi - 2.\theta_1$ et $\theta_3 = \theta_1 - \frac{\pi}{2}$) montrer que

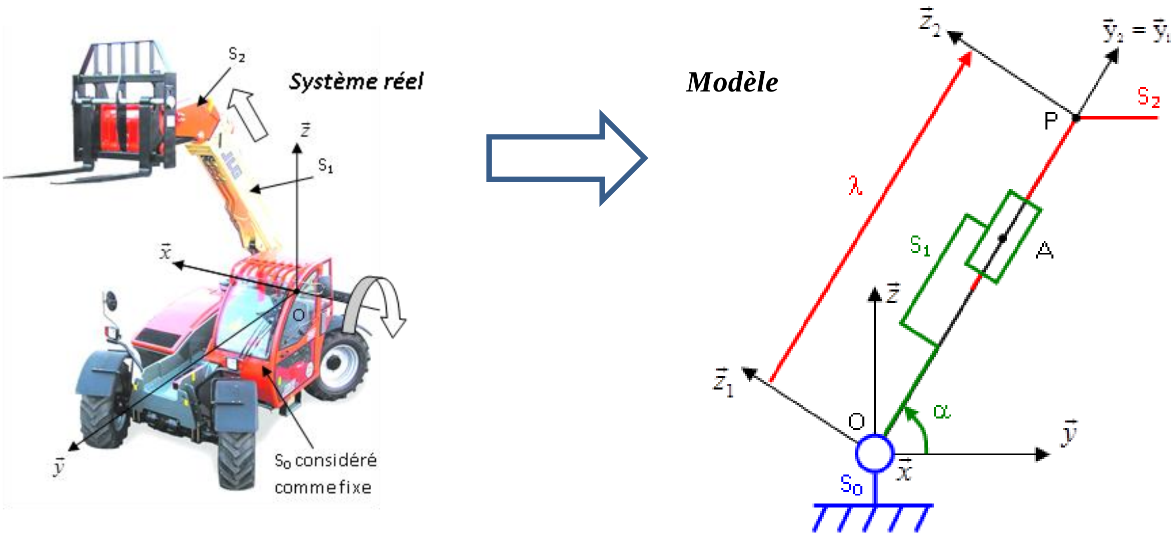
$\overrightarrow{V_{M,3/0}}.\vec{x}_0 = 0$ et déterminer $\left\|\overrightarrow{V_{M,3/0}}\right\|$.

Déterminer la valeur numérique de la vitesse maximale (R = 48 cm, L = 72 cm et $\dot{\theta}_1$ =0,08tr/min) et conclure quant à la capacité du robot à satisfaire le critère de vitesse d'approche du fruit de la fonction FS1.

Vecteur vitesse et vecteur accélération – Calcul direct

Exercice 4 : Nacelle élévatrice

On étudie une nacelle élévatrice monté sur un tracteur de manutention. Le repère R=(O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) est lié au tracteur supposé fixe. Un bras articulé (S_1) est en rotation autour de l'axe (O, x) repéré par l'angle $\alpha=(\vec{y},\overrightarrow{y_1})$. La nacelle ($S_2$) est en translation rectiligne d'axe (O, $\overrightarrow{y_1}$) par rapport à (S_1) de paramètre λ=OP.



Objectif de l'étude : vérifier que la vitesse en P ne dépasse pas une vitesse limite V_{lim} imposée par les normes de sécurité

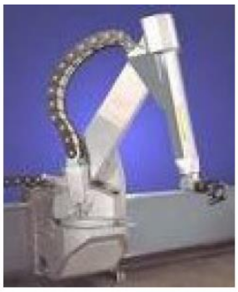
<u>Extrait du cahier des charges</u>
La norme de la vitesse du point P ne peut dépasser 0,4 m/s

Question 1 *:* Construire les figures planes de repérage. Déterminer l'expression générale de la vitesse du point P par rapport au bâti 0, notée $\overrightarrow{V_{P,2/0}}$.
La vitesse de sortie de tige étant égale à $\dot{\lambda}$=0,3 m/s , calculer la vitesse angulaire maximale $\dot{\alpha}$ à la sortie du motoréducteur. La longueur maximale du bras télescopique (hauteur maximale de la nacelle) est égale à 8m.

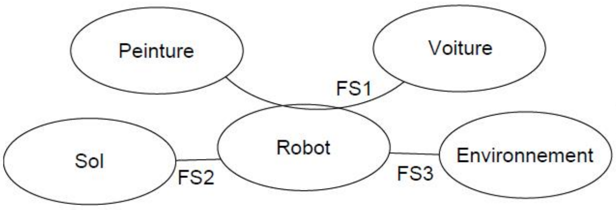
Question 2 *:* L'étude dynamique de la nacelle impose de connaître l'accélération du point P par rapport au bâti 0, notée $\overrightarrow{a_{P,2/0}}$. Déterminer l'expression générale de cette accélération. Analyser les différents termes de l'expression.

Exercice 5 : robot de peinture

On étudie un robot de peinture de voiture. Ce robot se déplace par rapport à une carrosserie de voiture, et projette dessus de la peinture. L'objectif est de déterminer les lois du mouvement du robot, pour lui permettre de vérifier le critère de vitesse de déplacement relatif (entre le robot et la carrosserie de voiture) du cahier des charges.

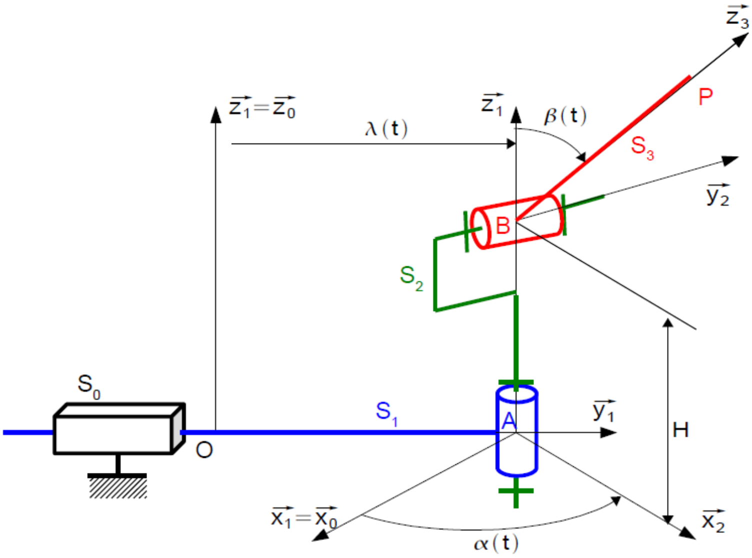


FS1 : projeter la peinture sur la voiture
FS2 : s'adapter au sol
FS3 : résister à l'environnement

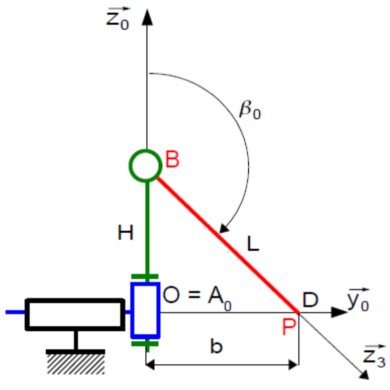


Fonction	Critère	Niveau
FS1	...	...
	Vitesse de déplacement relatif	Constante
	...	...

Le modèle cinématique du robot est donné sur la figure suivante :



Shéma cinématique du robot



Position médiane (P est en D)

Le chariot S_1, auquel on associe le repère $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, est en mouvement de translation de direction $\vec{y}_0$ par rapport au bâti S_0, de repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Le corps S_2, auquel on associe le repère $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, est en mouvement de rotation autour de l'axe $(B, \vec{z}_0)$ avec le chariot S_1. Le bras S_3, auquel on associe le repère $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, est en mouvement de rotation autour de l'axe $(B, \vec{y}_2)$ avec le corps S_2.
On désire que P décrive la droite $(D, \vec{x}_0)$ à vitesse constante, conformément au cahier des charges.

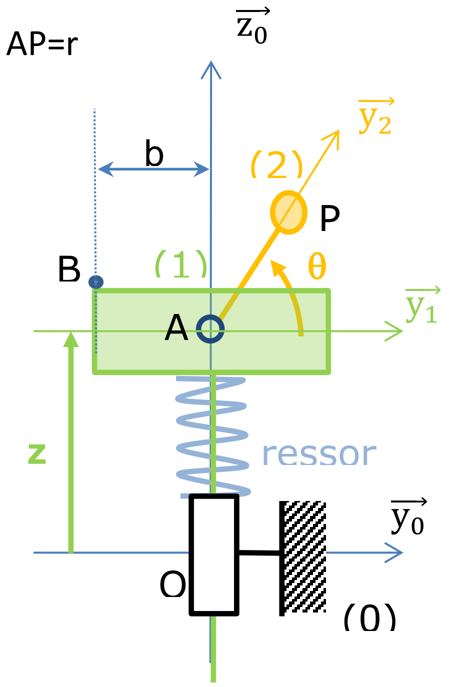
On a $\overrightarrow{OD} = b.\vec{y}_0$ avec $b = \sqrt{(L^2 - H^2)}$.

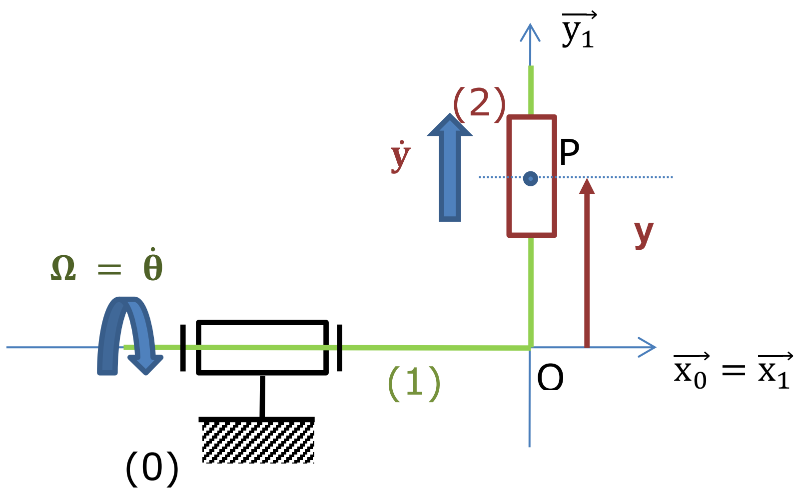
Question 1 *:* En constatant que $\dot{\beta} = 0$, exprimer β_0 en fonction de b et L.

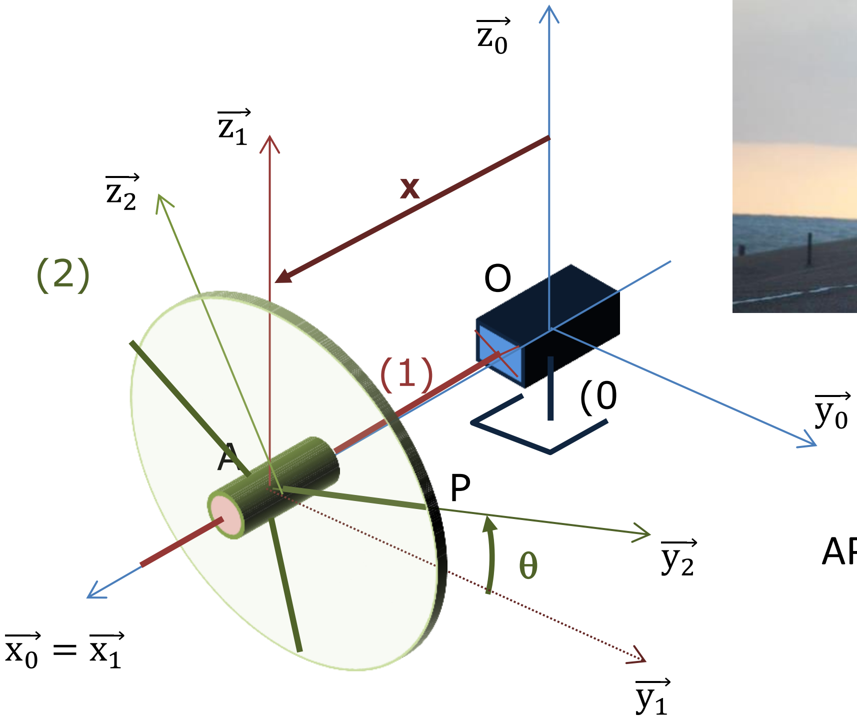
Question 2 *:* Traduire, à l'aide de l'expression de $\overrightarrow{V_{P,3/0}}$ exprimé dans le repère R_0, le fait que P se déplace à la vitesse V selon $\vec{x}_0$. Exprimer alors $\dot{\lambda}$ et $\dot{\alpha}$ en fonction de V, b et α.

TD : CHAINES OUVERTES – Différentes méthodes

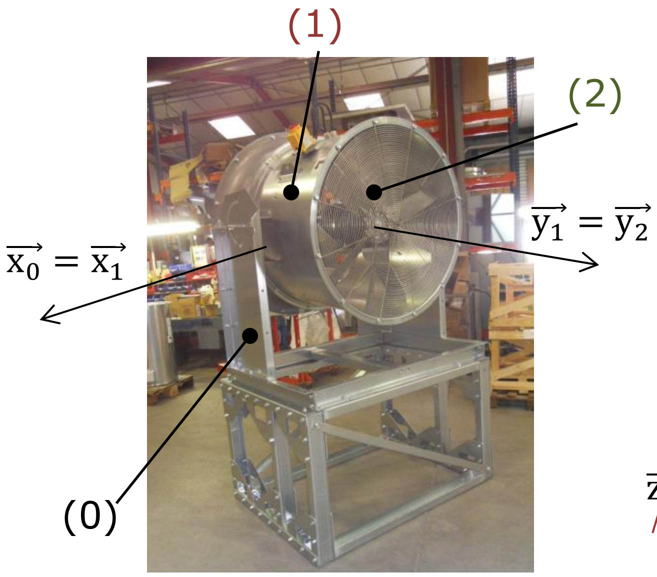
Sur ces différents exemples, calculer vecteur vitesse et vecteur accélération du point P / au repère fixe par différentes méthodes.

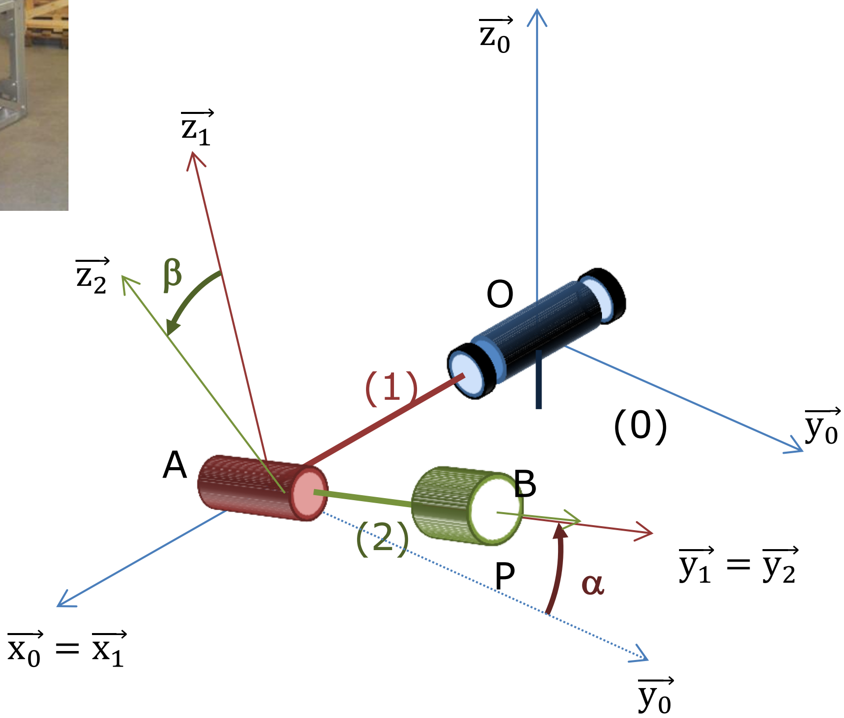






AP=r



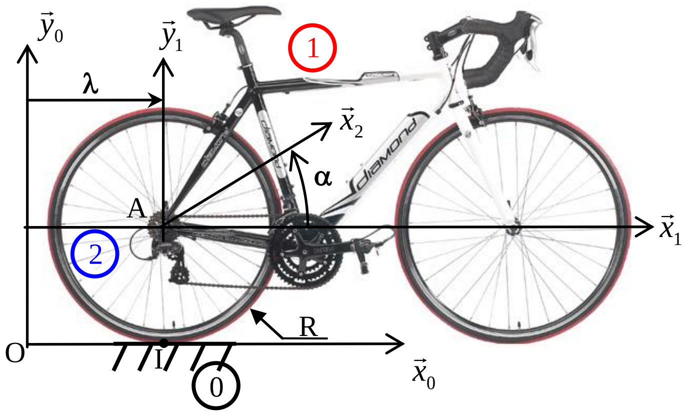


OA=a
AB=b
BP=c suivant x_2

CHAINES FERMEES - CINEMATIQUE DU CONTACT

Exercice 1 : Condition de roulement sans glissement d'une roue

L'objectif est de définir la relation entre la fréquence de pédalage, la rotation de la roue du vélo et la vitesse du vélo.



On considère un vélo qui avance. Les roues de rayon R (R = 350mm) roulent sans glisser sur le sol. La position du vélo (point A) est repérée par la longueur λ(t) et la rotation de la roue par l'angle α(t).

Objectif de l'étude **:** déterminer le braquet le mieux adapté au coureur.

Question 1 *:* Exprimer la condition de roulement sans glissement en I et en déduire la relation entre $\dot{\lambda}$ et $\dot{\alpha}$.

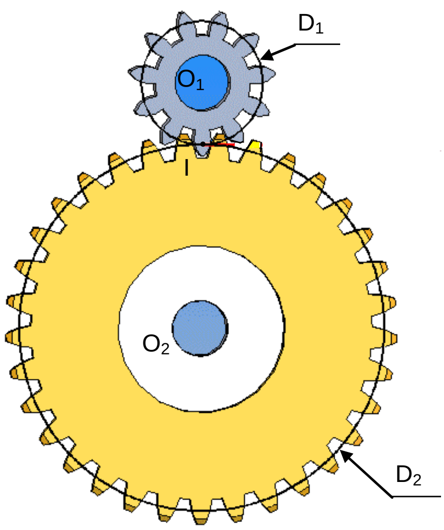
Question 2 *:* La vitesse de pédalage d'un coureur professionnel sur terrain plat étant de 100tr/min environ, déterminer le rapport des vitesses entre le pédalier et la roue arrière lorsque celui-ci roule à une vitesse de 50 km/h.

Sachant que le nombre de dents du plateau est égal à 51, quel doit être le nombre de dents du pignon arrière pour satisfaire la condition (100tr/min pour 50km/h)

Exercice 2 : rapport de réduction d'un engrenage

L'objectif est de retrouver la relation classique entre les vitesses de rotation de deux roues d'engrenage.

On considère deux roues d'engrenage (1) et (2) qui engrènent. Le profil des dentures impliquent une condition de vitesse relative nulle au point I. La vitesse de rotation de (1) est ω_1 et la vitesse de rotation de (2) est ω_2.



Question 1 *:* Retrouver l'expression du rapport de réduction ω_2/ω_1 en fonction des diamètres primitifs D_1 et D_2.

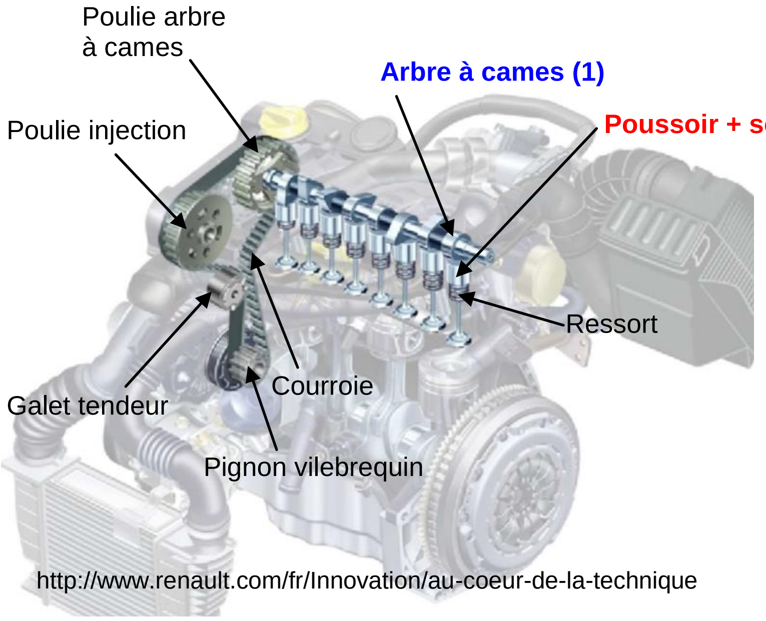
Question 2 *:* Le rapport des diamètres étant égal au rapport des nombres de dents Z_1 et Z_2, exprimer ω_2/ω_1 en fonction des nombres de dents Z_1 et Z_2.
Que devient l'expression pour un engrenage intérieur ?

Exercice 3 : Vitesse de glissement d'un mécanisme à excentrique

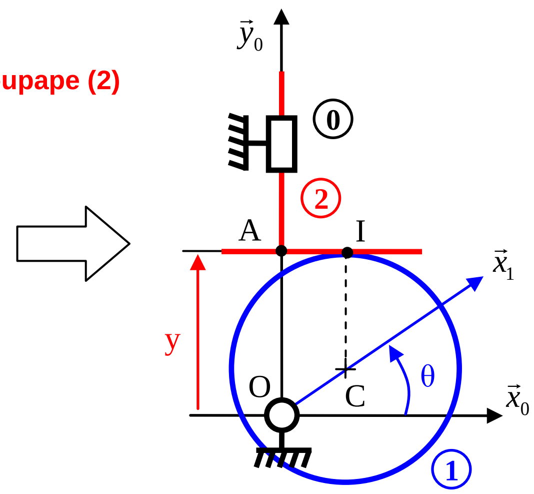
On s'intéresse à un système de distribution automobile. Ce système permet l'admission du carburant et le refoulement des gaz d'échappement lors du cycle moteur. Le mouvement d'entrée vient du pignon du vilebrequin, la rotation de ce dernier entraine en rotation l'arbre à cames par l'intermédiaire de la courroie de distribution. La rotation continue de l'arbre à cames est ensuite transformée en un mouvement de translation alternée de l'ensemble poussoir + soupape. On donne une modélisation plane très simplifiée d'une came (1) et d'un ensemble poussoir + soupape (2).

La came, modélisée par un disque de rayon R et de centre C en liaison pivot avec le bâti (0) autour de l'axe $(O, \vec{z}_0)$ tel que $\overrightarrow{OC} = e.\vec{x}_1$, est en contact ponctuel en I de normale $(I, \vec{y}_0)$ avec l'ensemble poussoir + soupape (2) en liaison glissière d'axe $(A, \vec{y}_0)$ avec le bâti (0).

Système réel



Modèle



Ce type de système est confronté à deux problématiques techniques qui doivent conduire à un compromis : le non décollement de la soupape (2) (lié l'accélération de (2)/(0)) et la limitation de la puissance dissipée au contact entre (1) et (2) (lié à la vitesse de glissement de (2)/(1))

Le cahier des charges impose une vitesse de glissement maximale égale à 2m/s

Pour assurer le non décollement en absence d'effort presseur, la valeur de l'accélération doit rester inférieure à $10 m/s^2$

Objectif de l'étude : déterminer les grandeurs cinématiques utiles à la condition de non décollement au calcul de la puissance dissipée au contact et valider le cahier des charges.

Question 1 : Exprimer la vitesse de glissement $\overrightarrow{V_{I,2/1}}$ en fonction de e, R et ω.

Question 2 : Calculer l'accélération $\overrightarrow{a_{A,2/0}}$ en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre à came $\omega = \dot{\theta}$ supposée constante.

Pour un excentrique dont les dimensions sont R=2cm et e=6mm, calculer la vitesse de rotation maximale ω pour respecter les deux critères du cahier des charges.

Que prévoit le concepteur pour résoudre ces deux problèmes techniques ?

Exercice 4 : relations cinématiques d'un système bielle-manivelle

On considère le compresseur JUN-AIR représenté figure 1 constitué

- ✓ d'un corps (0) fixe. On lui lie le repère considéré comme galiléen $R_0=(O_0,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})$.
- ✓ d'un vilebrequin (1) en rotation autour de l'axe O_1z_1 de paramètre α avec $\alpha = (\vec{x_0},\vec{x_1})$. O_1 est un point fixe tel que $\overrightarrow{O_0O_1} = h.\vec{z_0}$. On pose $\overrightarrow{O_1A} = r.\vec{x_1}$
- ✓ d'une bielle (2) en liaison pivot en A par rapport à (1) d'axe Az_1 et en liaison pivot par rapport au piston (3) d'axe Bz_1. La position de la bielle est paramétrée par le paramètre β avec $\beta = (\vec{x_0},\vec{x_2})$. On pose $\overrightarrow{AB} = L.\vec{x_2}$
- ✓ d'un piston (3) en mouvement de translation rectiligne par rapport au corps d'axe O_1x_0. Le paramètre de translation est $\lambda=O_1B$.

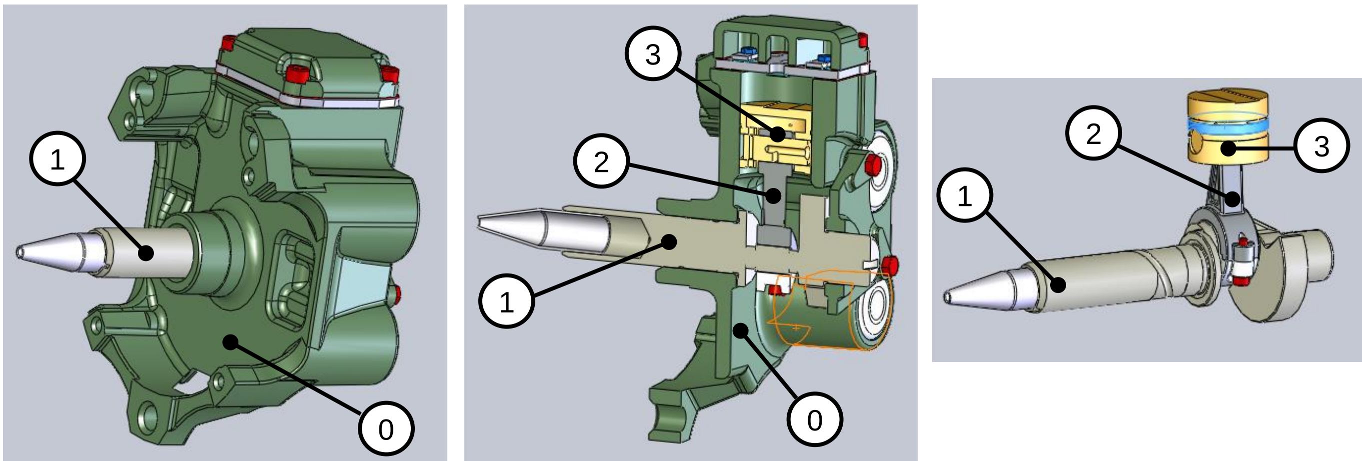


Figure 1

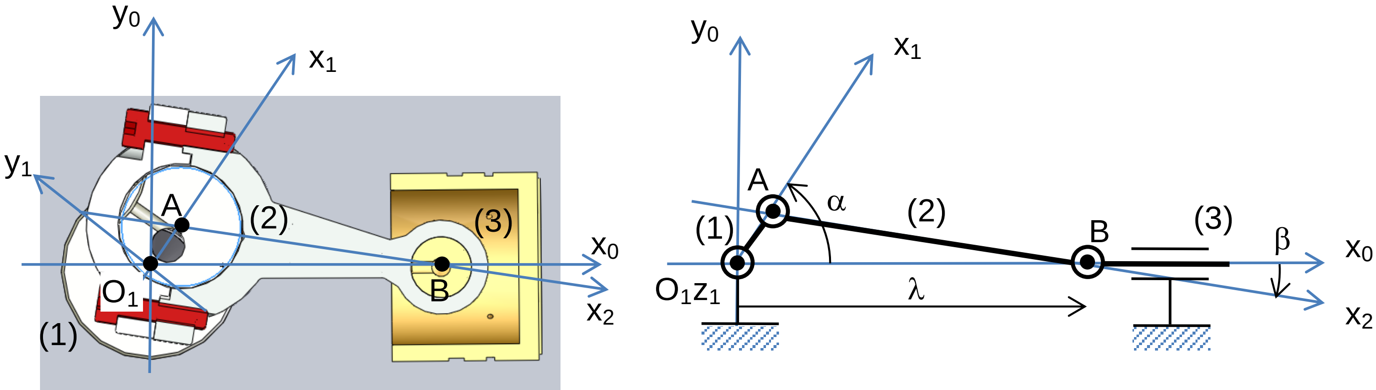


Figure 2

Objectif de l'étude : Etablir la loi entrée-sortie d'un système bielle manivelle

On suppose que (1) tourne à vitesse constante $\dot{\alpha}=\omega=cste$

$O_1A=r=9{,}5mm$, $AB=L=47.5mm$ et $\omega=3000tr/min$

Question 1 : A partir des données et de la figure 2, montrer que :

$$\begin{cases} \sin\beta = -\dfrac{r}{L}.\sin\alpha \\ \lambda = r.\cos\alpha + L.\cos\beta \end{cases}$$

Question 2 : Calculer la vitesse V du piston en fonction de la vitesse de rotation du vilebrequin.

Que deviennent les relations si on suppose alors que r/L est petit devant 1 ce qui revient à poser $\cos\beta=1$ et $\sin\beta=\beta$

Exercice 5 : Positionnement de radar

Afin d'assurer la sécurité des personnes chargées de déminer les terrains militaires, les ingénieurs ont imaginé d'intégrer un détecteur de métaux à un véhicule blindé.

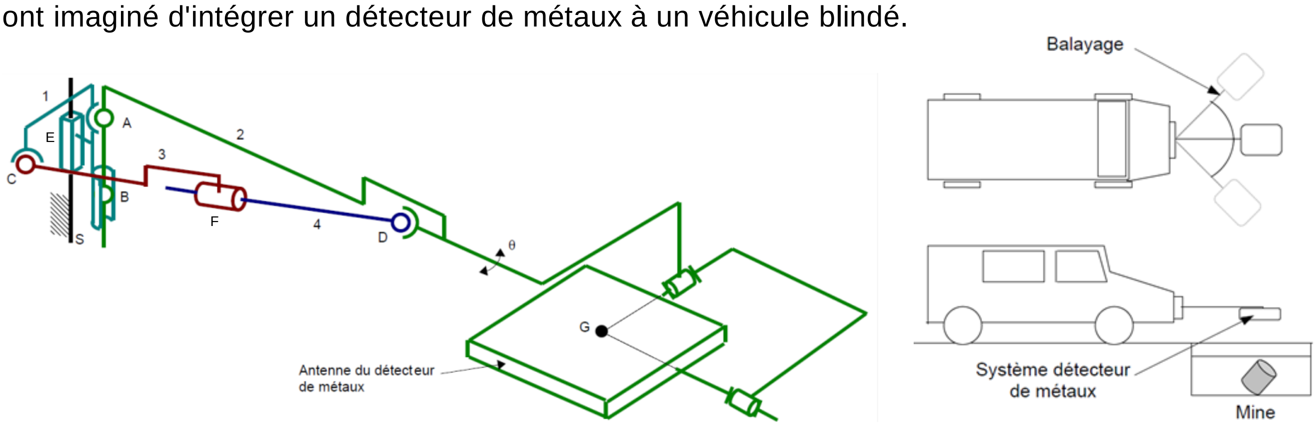


Figure 1

Le cahier des charges impose un certain nombre de critères à respecter :
Balayage angulaire à effectuer : ± 60°   Vitesse limite du point G : 3m/s

Le balayage par l'antenne de la zone à nettoyer est réalisé grâce à la rotation d'axe (AB) de la pièce (2) actionnée par un vérin hydraulique 3-4.

Objectif de l'étude : cette étude vise à vérifier que le système permet un balayage angulaire du radar égal à ±60°.

On se place dans le cas d'une modélisation plane et on adopte les notations suivantes :

$$\overrightarrow{CD}.\vec{x}_3 = x$$
$$\overrightarrow{AC}.\vec{y}_1 = -d$$
$$\overrightarrow{AD}.\vec{x}_2 = \lambda$$

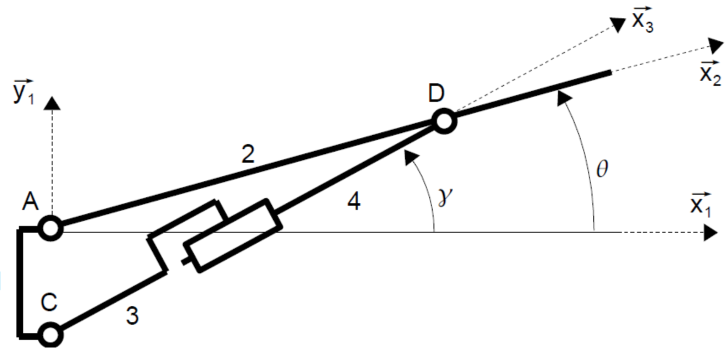


Figure 2

Le vérin 3-4 permet de faire varier la distance CD entre 500mm et 920mm (course du vérin de 420mm). On donne $d = 230$ mm et $\lambda = 710$ mm.

Question 1 *: Après avoir exprimé l'angle de balayage θ en fonction de la longueur du vérin x, conclure quant à la capacité du positionneur de radar à satisfaire le critère de balayage angulaire du cahier des charges.*

Objectif de l'étude : cette étude vise à vérifier que la vitesse de sortie de tige du vérin égale à $\dot{x}$ =0,4m/s permet de ne pas dépasser la vitesse limite du point G.

La modélisation est donnée figure (2) avec $\overrightarrow{AG} = L.\overrightarrow{x_2}$. On se place dans la position θ=0.

Question 2 *: Dans une position θ quelconque, exprimer la vitesse du point G par rapport au repère fixe en fonction du paramètre θ et de V (vitesse de translation du véhicule suivant $\overrightarrow{x_1}$).*
Que devient cette expression lorsque θ=0.
Montrer que la vitesse de sortie de tige du vérin respecte le critère du cahier des charges lié à la vitesse maximale du point G.