Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion

Ce cours vous est proposé par Jean-François Caulier, Maître de conférences, Université Paris 1 Panthéon Sorbonne et par AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices complémentaires

Attention : ceci est la version corrigée des exercices

Consignes

Les exercices de cette brochure s'appuient sur les concepts présentés dans le cours de « Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion ». Ils sont donc proposés dans le même ordre d'apparition que le chapitrage de ce cours. Certains exercices nécessitent soit un niveau un peu plus avancé soit d'avoir fait le tour complet du cours théorique avant de pouvoir être abordés sereinement. Ces exercices sont indiqués par la présence d'un astérisque ***** à côté de leur numéro.

Bon travail !

Table des matières

AUNEGe, CC – BY NC ND

Fondamentaux

Ensembles numériques

Questions

1. Soit les nombres

$$\sqrt[4]{8}, -\frac{72}{3}, -\frac{\pi}{2}, \sqrt[3]{1331}, \sqrt[5]{-32}, \frac{3}{4}, 5{,}38.1 \text{ et } 10.775$$

a) Lesquels sont des nombres naturels ?

b) Lesquels sont des nombres entiers ?

c) Lesquels sont des nombres rationnels ?

d) Lesquels sont des nombres irrationnels ?

e) Lesquels sont des nombres réels ?

2. Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux et justifiez vos réponses.

a) $0 \in \mathbb{Q}'$

b) $\frac{32}{4} \in \mathbb{N}$

c) $-\frac{36}{8} \in \mathbb{Z}$

d) $\pi \in \mathbb{R}$

e) $4 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

f) $-2 \in \mathbb{Q}$

g) $\sqrt{169} \in \mathbb{N}$

h) $\sqrt[3]{9} \in \mathbb{Q}'$

i) $\mathbb{Z}^+ \cap \mathbb{Z}^- = \{0\}$

j) $\mathbb{Q}^+ \subseteq \mathbb{Z}$

k) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$

l) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

m) $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$

n) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

Réponses

1. $\sqrt[4]{8}, -\frac{72}{3}, -\frac{\pi}{2}, \sqrt[3]{1331}, \sqrt[5]{-32}, \frac{3}{4}, 5{,}38.1$ et 10.775

AUNEGe, CC – BY NC ND

a) Lesquels sont des nombres naturels ?

- $5, \sqrt[3]{1331} = 11$

b) Lesquels sont des nombres entiers ?

- $5, \sqrt[3]{1331}, -\frac{72}{3} = -24, \sqrt[5]{-32} = -2$

c) Lesquels sont des nombres rationnels ?

- $5, \sqrt[3]{1331}, -\frac{72}{3}, \sqrt[5]{-32}, \frac{3}{4}, 5{,}38.1{,}10.775$

d) Lesquels sont des nombres irrationnels ?

- $\sqrt[4]{8}, -\frac{\pi}{2}$

e) Lesquels sont des nombres réels ?

- Tous les nombres donnés sont des nombres réels.

2. Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux et justifiez vos réponses.

a) $0 \in \mathbb{Q}'$ Faux : 0 est un nombre rationnel.

b) $\frac{32}{4} \in \mathbb{N}$ Vrai : $\frac{32}{4} = 8$, qui est un nombre naturel.

c) $-\frac{36}{8} \in \mathbb{Z}$ Faux : $-\frac{36}{8} = -4.5$, qui n'est pas un entier.

d) $\pi \in \mathbb{R}$ Vrai : π est un nombre réel.

e) $4 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ Faux : 4 est un nombre naturel.

f) $-2 \in \mathbb{Q}$ Vrai : -2 est un nombre rationnel.

g) $\sqrt{169} \in \mathbb{N}$ Vrai : $\sqrt{169} = 13$, qui est un nombre naturel.

h) $\sqrt[3]{9} \in \mathbb{Q}'$ Vrai : $\sqrt[3]{9}$ est un nombre irrationnel.

i) $\mathbb{Z}^+ \cap \mathbb{Z}^- = \{0\}$ Faux : $\mathbb{Z}^+$et $\mathbb{Z}^-$sont disjoints.

j) $\mathbb{Q}^+ \subseteq \mathbb{Z}$ Faux : Les nombres rationnels positifs ne sont pas tous des entiers.

k) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$ Vrai : Les nombres réels moins les rationnels sont les irrationnels.

l) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ Vrai : Les nombres naturels sont inclus dans les entiers.

m) $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$Vrai : $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels positifs et négatifs.

n) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ Vrai : Tous les entiers sont des nombres rationnels.

Les ensembles

Questions

1. **Soit les ensembles**

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est un diviseur de } 36\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est un diviseur de } 54\}$$

a) Donnez $A \cup B$ en extension et en compréhension.

b) Donnez $A \cap B$ en extension et en compréhension.

c) Donnez $A \setminus B$ en extension et en compréhension.

d) Donnez $B \setminus A$ en extension et en compréhension.

2. **Soit les ensembles**

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est un diviseur de } 36\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \text{ est pair et inférieur à } 20\}$$

a) Donnez $A \cup B$ en extension et en compréhension.

b) Donnez $A \cap B$ en extension et en compréhension.

c) Donnez $A \setminus B$ en extension et en compréhension.

d) Donnez $B \setminus A$ en extension et en compréhension.

3. **Soit $C = \{5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ et $D = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux et justifiez vos réponses.**

   (a) $\{7,9\} \subseteq C \cap D$

   (d) $\{6,8\} \subseteq D \setminus C$

   (b) $6 \in C \setminus D$

   (e) $11 \in C \cup D$

   (c) $\{4,5,6\} \in D$

   (f) $\{4,9,15\} \subseteq C \cup D$

Réponses

1. **Soit les ensembles**

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est un diviseur de } 36\}$$

AUNEGe, CC – BY NC ND

et

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est un diviseur de } 54\}$$

donc

$$A = \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$$

et

$$B = \{1,2,3,6,9,18,27,54\}$$

a) Donnez $A \cup B$ en extension et en compréhension.

$$A \cup B = \{1,2,3,4,6,9,12,18,27,36,54\}$$

$A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est un diviseur de 36 ou 54}\}$

b) Donnez $A \cap B$ en extension et en compréhension.

$$A \cap B = \{1,2,3,6,9,18\}$$

$A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est un diviseur commun de 36 et 54}\}$

c) Donnez $A \setminus B$ en extension et en compréhension.

$$A \setminus B = \{4,12,36\}$$

$A \setminus B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est un diviseur de 36 et } x \text{ n'est pas un diviseur de 54}\}$

d) Donnez $B \setminus A$ en extension et en compréhension.

$$B \setminus A = \{27,54\}$$

$$B \setminus A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est un diviseur de 54 et } x \text{ n'est pas un diviseur de 36}\}$$

2. Soit les ensembles

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est un diviseur de } 36\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \text{ est pair et inférieur à } 20\}$$

donc

$$A = \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$$
$$B = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$$

AUNEGe, CC – BY NC ND

a) Donnez $A \cup B$ en extension et en compréhension.

$$A \cup B = \{1,2,3,4,6,8,9,10,12,14,16,18,20,36\}$$

$A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ est un diviseur de 36 ou x est pair et inférieur à 20$\}$

b) Donnez $A \cap B$ en extension et en compréhension.

$$A \cap B = \{2,4,6,12,18\}$$

$A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ est un diviseur de 36 et x est pair et inférieur à 20$\}$

c) Donnez $A \setminus B$ en extension et en compréhension.

$$A \setminus B = \{1,3,9,36\}$$

$A \setminus B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ est un diviseur de 36 et x n'est pas pair ou supérieur à 20$\}$

d) Donnez $B \setminus A$ en extension et en compréhension.

$$B \setminus A = \{8,10,14,16,20\}$$

$B \setminus A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ est pair et inférieur à 20 et x n'est pas un diviseur de 36$\}$

3. (a) $\{7,9\} \subseteq C \cap D$

$$C \cap D = \{5,7,9\}$$
$\{7,9\} \subseteq \{5,7,9\}$ (vrai)

(b) $6 \in C \setminus D$

$$C \setminus D = \{11,13,15\}$$
$6 \notin C \setminus D$ (faux)

(c) $\{4,5,6\} \in D$

$\{4,5,6\} \subseteq D = \{4,5,6,7,8,9\}$ (vrai)

(d) $\{6,8\} \subseteq D \setminus C$

$$D \setminus C = \{4,6,8\}$$
$\{6,8\} \subseteq \{4,6,8\}$ vrai)

(e) $11 \in C \cup D$

AUNEGe, CC – BY NC ND

$$C \cup D = \{4,5,6,7,8,9,11,13,15\}$$
$$11 \in C \cup D \text{ (vrai)}$$

(f) $\{4,9,15\} \subseteq C \cup D$

$$C \cup D = \{4,5,6,7,8,9,11,13,15\}$$
$$\{4,9,15\} \subseteq C \cup D \text{ (vrai)}$$

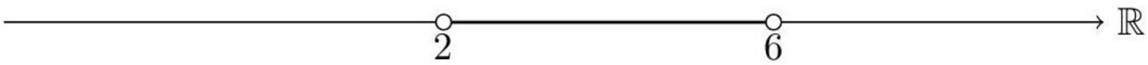
Les intervalles

Questions

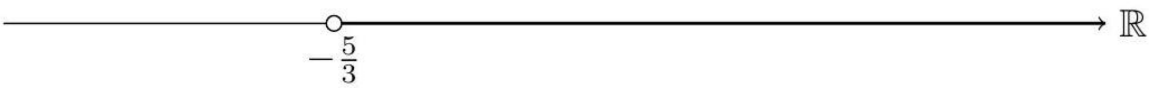
1. **Écrivez l'intervalle correspondant à ces représentations graphiques :**

a)

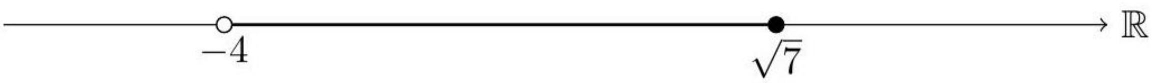
b)



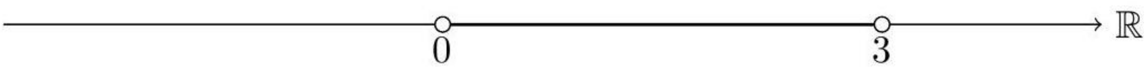
c)



d)

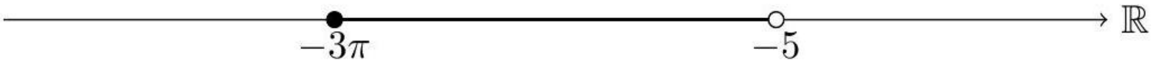


e)



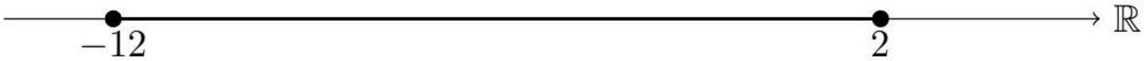
AUNEGe, CC – BY NC ND

f)



g)

h)



2. Représentez graphiquement les intervalles suivants :

(a) $x \in]-8,-1]$

(b) $x \in]1,+\infty[$

(c) $x \in [1/2,4]$

(d) $x \in]-\infty,2/3]$

(e) $x \in]-3,5/3[$

(f) $x \in [-7,+\infty[$

(g) $x \in -\infty,-5[$

(h) $x \in [-4,5;2,5[$

3. Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux et justifiez vos réponses.

(a) $\mathbb{Q}^- =]-\infty,0[$

(b) $4 \in [-1,4[$

(c) $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\} \subseteq [0,2]$

(d) $]-1/4,/5] \subseteq [-1/4 \cdot 7/4$

(e) $\{5,6,7\} \in [5,7]$

(f) $[-2,1] \subseteq \{-2,-1,0,1\}$

4. * Déterminez les intervalles définis par les expressions suivantes :

(a) $3-2x<7$

(b) $5<3x+10 \leq 16$

(c) $\frac{2}{3x}<1 \ x \neq 0$

(d) $\frac{x+7}{x-3}>2$

(e) $\frac{2x-1}{x+3}>1$

(f) $x^2>x^3$

Réponses

1. Les intervalles représentés sont les suivants :

a) $x \in [-8,+\infty[$

b) $x \in]2,6[$

c) $x \in]-\frac{5}{3},+\infty[$

d) $x \in]-4,\sqrt{7}]$

e) $x \in]0,3[$

f) $x \in [-3\pi,-5[$

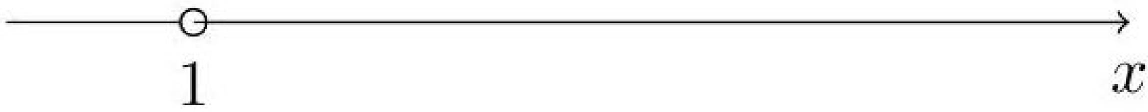
g) $x \in \left[\frac{17}{4},+\infty\right[$

h) $x \in [-12,2]$

2. (a) $x \in]-8,-1]$:

(b) $x \in]1,+\infty[$:

AUNEGe, CC – BY NC ND



(c) $x \in [1/2{,}4]$:

(d) $x \in]-\infty, 2/3]$:

(e) $x \in]-3{,}5/3[$:

(f) $x \in [-7, +\infty[$:

(g) $x \in -\infty, -5[$:

(h) $x \in [-4{,}5; 2{,}5[$:

AUNEGe, CC – BY NC ND

3. **Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux et justifiez vos réponses.**

(a) $\mathbb{Q}^- =]-\infty, 0[$

Faux. $\mathbb{Q}^-$représente les nombres rationnels négatifs. L'intervalle $]-\infty, 0[$ inclut tous les nombres réels négatifs non nuls, donc pas seulement les rationnels.

(b) $4 \in [-1,4[$

Faux. L'intervalle $[-1,4\,[$ inclut -1 et tous les nombres jusqu'à mais non compris 4. Donc 4 n'est pas inclus dans cet intervalle.

(c) $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\} \subseteq [0,2]$

Vrai. Les valeurs $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ valent environ 1,414 et 1,732 respectivement, qui sont toutes les deux comprises dans l'intervalle $[0,2]$.

(d) $]-1/4,5] \subseteq [-1/4,7/4]$

Faux. L'intervalle $]\,-1/4,5\,]$ inclut des nombres supérieurs à $7/4$ (qui est 1.75), donc il n'est pas contenu dans $[-1/4,7/4]$.

(e) $\{5,6,7\} \subseteq [5,7]$

Vrai. Les valeurs 5,6 et 7 sont toutes comprises dans l'intervalle [5,7].

4. ***Déterminez les intervalles définis par les expressions suivantes :**

(a) $3 - 2x < 7$: en soustrayant 3 des deux côtés, on obtient $-2x < 4$ puis en divisant par -2 les deux côtés, on obtient $x > -2$. On change le sens d'inégalité en multipliant ou en divisant par un négatif. L'ensemble solution est l'intervalle $]\,-2; +\infty[$.

(b) $5 < 3x + 10 \leq 16 \Leftrightarrow -5 < 3x \leq 6 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} < x \leq 2$. L'intervalle de solutions est $\left]\,-\frac{5}{3}, 2\right]$.

(c) $\frac{2}{3x} < 1$. Deux possibilités : x positif ou négatif. Lorsque $x > 0$: $\frac{2}{3x} < 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3x} \cdot \frac{3x}{2} < 1 \cdot \frac{3x}{2} \Leftrightarrow 1 < \frac{3x}{2} \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{2}{3} < \frac{3x}{2} \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < x$.

Lorsque $x < 0$:

$$\frac{2}{3x} < 1 \Leftrightarrow 3x \cdot \frac{2}{3x} > 3x \cdot 1 \Leftrightarrow 2 > 3x$$

AUNEGe, CC – BY NC ND

Cette condition est toujours satisfaite puisque nous sommes dans le cas $x < 0$. Conclusion, l'ensemble de solutions est l'union des intervalles $]-\infty, 0[\cup]2/3, +\infty[$.

(d) $\frac{x+7}{x-3} > 2$. Si $x - 3 > 0$ ou $x > 3$, alors $\frac{x+7}{x-3} > 2 \Leftrightarrow x + 7 > 2(x-3) \Leftrightarrow -x > -13 \Leftrightarrow x < 13$. Donc le premier ensemble de solutions est $x \in]3,13[$.

Si $x - 3 < 0$ ou $x < 3$, alors $\frac{x+7}{x-3} > 2 \Leftrightarrow x + 7 < 2(x-3) \Leftrightarrow 7 < x - 6 \Leftrightarrow 13 < x$. Or nous sommes dans le cas $x < 3$. Il n'y a donc pas de solution.

Conclusion, l'ensemble solutions est $]3,13[$.

(e) $\frac{2x-1}{x+3} > 1$. Si $x + 3 > 0$ ou $x > -3$, alors $\frac{2x-1}{x+3} > 1 \Leftrightarrow 2x - 1 > x + 3 \Leftrightarrow x > 4$.

Si $x < -3$, alors $\frac{2x+1}{x-3} > 1 \Leftrightarrow 2x + 1 < x + 3 \Leftrightarrow x < 4$. La contrainte la plus serrante est $x < -3$. L'ensemble solution est donc $x \in]-\infty, -3[\cup]4, +\infty[$.

(f) $x^2 > x^3 \Leftrightarrow x^3 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) < 0$, or $x^2 > 0$ si $x \neq 0$. Il faut donc $(x-1) < 0 \Leftrightarrow x < 1$. L'ensemble solution est donc $]-\infty, 1[\setminus\{0\}$.

Valeur absolue

Questions

1. Évaluez les expressions suivantes.

(a) $|4/5|$

(b) $|-12|$

(c) $|-5-4|$

(d) $|25-12|$

(e) $3-|-3|$

(f) $|-4|-|-6|$

(g) $|2/3-3/10|$

(h) $|1/3-3/4|$

AUNEGe, CC – BY NC ND

2. **Déterminez, si elle existe, la ou les valeurs réelles de x qui satisfont aux égalités suivantes.**

(a) $|x| = 5$

(b) $|x| = -2$

(c) $|x| = 1/8$

(d) $|x| = \pi$

(e) $|x| = -1/2$

(f) $|x| = 2{,}5$

3. **Résolvez les équations suivantes et donnez pour chacune une interprétation en terme de distance sur la droite des réels :**

(a) $|x - 2| = 5$

(b) $|2x - 4| = 8$

(c) $|12x + 3| = 4$

(d) $|4 - 5x| = 3$

4. *** Décrivez et représentez les intervalles déterminés par les inéquations suivantes :**

(a) $|x| < 3$

(b) $|x| \geq 2$

(c) $|x - 5| < 2$

(d) $|x - 2| < \delta\ (\delta > 0)$

(e) $|x + 3| \leq 2$

(f) $0 < |x - 6| < \delta\ (\delta > 0)$

AUNEGe, CC – BY NC ND

Réponses

1. Évaluez les expressions suivantes.

(a) $\left|\frac{4}{5}\right| = \frac{4}{5}$

(b) $|-12| = 12$

(c) $|-5-4| = |-9| = 9$

(d) $|25-12| = |13| = 13$

(e) $3-|-3| = 3-3 = 0$

(f) $|-4|-|-6| = 4-6 = -2$

(g) $\left|\frac{2}{3}-\frac{3}{10}\right| = \left|\frac{20}{30}-\frac{9}{30}\right| = \left|\frac{11}{30}\right| = \frac{11}{30}$

(h) $\left|\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\right| = \left|\frac{4}{12}-\frac{9}{12}\right| = \left|-\frac{5}{12}\right| = \frac{5}{12}$

2. Déterminez, si elle existe, la ou les valeurs réelles de x qui satisfont aux égalités suivantes.

(a) $|x| = 5$

Les solutions sont $x = 5$ et $x = -5$.

(b) $|x| = -2$

Pas de solution. La valeur absolue d'un nombre ne peut pas être négative.

(c) $|x| = \frac{1}{8}$

Les solutions sont $x = \frac{1}{8}$ et $x = -\frac{1}{8}$.

(d) $|x| = \pi$

Les solutions sont $x = \pi$ et $x = -\pi$.

(e) $|x| = -\frac{1}{2}$

Pas de solution. La valeur absolue d'un nombre ne peut pas être négative.

(f) $|x| = 2{,}5$

Les solutions sont $x = 2{,}5$ et $x = -2{,}5$.

3. **Résolvez les équations suivantes et donnez pour chacune une interprétation en terme de distance sur la droite des réels :**

(a) $|x-2| = 5$

Lorsque $x - 2 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq 2$, on a $|x-2| = x - 2$. Donc $|x-2| = 5 \Leftrightarrow x - 2 = 5 \Leftrightarrow x = 7$.

Lorsque $x - 2 < 0$, c'est-à-dire $x < 2$, on a $|x-2| = -x + 2$. Donc $|x-2| = 5 \Leftrightarrow -x + 2 = 5 \Leftrightarrow x = -3$

Interprétation : $|x-2|$ représente la distance séparant x du point représentant le réel 2 sur la droite orientée et graduée. Cette distance étant de 5 unités, le réel x vaut -3 ou 7.
(b) Autre méthode plus rapide que la précédente, utilisant la propriété $|x| = c \Leftrightarrow x = \pm c$. $|2x - 4| = 8 \Leftrightarrow 2x - 4 = \pm 8$. Donc $2x - 4 = 8 \Leftrightarrow x = 6$ ou $2x - 4 = -8 \Leftrightarrow x = -2$.

Interprétation : La distance entre $2x$ et le point 4 est de 8 unités, c'est-à-dire la distance entre x et 2 est de 4 d'unités. Donc $x = 2 + 4 = 6$ ou $x = 2 - 4 = -2$.

(c) $|12x + 3| = 4$

$\Leftrightarrow 12x + 3 = \pm 4$. Donc $12x + 3 = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{12}$ ou $12x + 3 = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{12}$.

Interprétation : la distance entre $12x$ et le réel (-3) est de 4 unités, c'est-à-dire la distance entre x et le réel $\frac{-3}{12} = \frac{-1}{4}$ est de $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ d'unité.

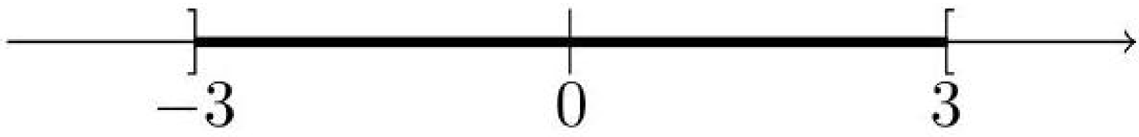
(d) $|4 - 5x| = 3$

$\Leftrightarrow 4 - 5x = \pm 3$. Donc $4 - 5x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$ ou $4 - 5x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}$.

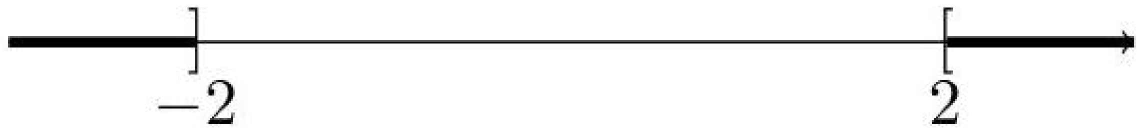
Interprétation : la distance entre $5x$ et le réel 4 sur la droite orientée et graduée des réels est de 3 unités, ou la distance entre x et le réel $\frac{4}{5}$ est de $\frac{3}{5}$ d'unité.

4. **Décrivez et représentez les intervalles déterminés par les inéquations suivantes :**

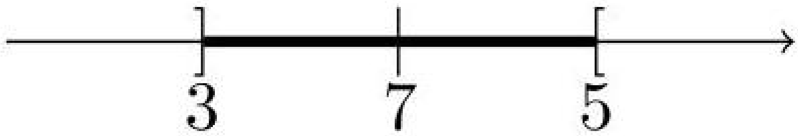
(a) $|x| < 3$: par la propriété $|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c$, on a $-3 < x < 3$ qui est l'intervalle $]-3{,}3[$. On considère tous les x à une distance de 0 de maximum 3 unités.



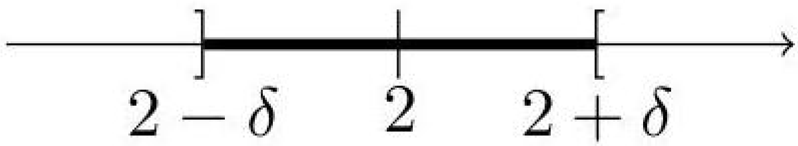
(b) $|x| \geq 2$: On sait que $|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$. En prenant son complémentaire dans $\mathbb{R}$, $|x| \geq 2$, on obtient $x \leq -2$ ou $x \geq 2$, soit l'union d'intervalles suivante : $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$.



(c) $|x-5| < 2 : -2 < x - 5 < 2 \Leftrightarrow 3 < x < 7$, c'est-à-dire l'intervalle $]3{,}7[$.

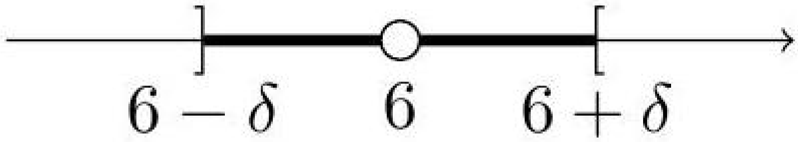


(d) $|x-2| < \delta (\delta > 0) : -\delta < x - 2 < \delta \Leftrightarrow 2 - \delta < x < 2 + \delta$, la distance entre x et 2 est inférieure à δ, c'est-à-dire l'intervalle $]2-\delta, 2+\delta[$:



(e) $|x+3| \leq 2$ est équivalent à $-2 \leq x + 3 \leq 2 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq -1$, c'est l'intervalle $[-5, -1]$:

(f) $0 < |x-6| < \delta \ (\delta > 0) : |x-6| < \delta$ représente la condition $6 - \delta < x < 6 + \delta$. La condition $0 < |x - 6|$ spécifie que $x \neq 6$. On obtient comme résultat l'union des intervalles suivante : $]\,6-\delta, 6[\cup]6{,}6+\delta[$. On appelle cette union d'intervalles un **$\boldsymbol{\delta}$**-voisinage épointé de 6.



Les fractions

Questions

1. Simplifiez les fractions suivantes.

(a) $15/36$

(b) $65/40$

(c) $40/68$

(d) $-24/51$

(e) $12/90$

(f) $-52/117$

(g) $64/84$

(h) $72/81$

(i) $-24/120$

(j) $-450/180$

2. Effectuez les opérations suivantes et simplifiez le résultat.

(a) $14/15 \times 25/49$

(b) $-27/16 \times 8/81$

(c) $4/9 + 8/15$

(d) $-5/12 + 25/18$

(e) $22/3 \div 6$

(f) $5/12 + 9/16$

(g) $32/15 + 17/10$

(h) $3/8 - 17/24$

(i) $5/6 - 4/9$

(j) $11/24 - 5/36$

(k) $\frac{27 \times 5/9}{2/5 - 3/4 + 1/10}$

(l) $\frac{3/7 + 2/3 - 1/2}{30 \times 5/6}$

(m) $\frac{5/6 - 1/4 + 2/3}{35/2 \times 3/28}$

(n) $\frac{3/4 \times 6/5}{1/8 + 2/3 - 5/12}$

Réponses

1. **Pour simplifier chaque fraction, nous allons d'abord décomposer le numérateur et le dénominateur en facteurs premiers, puis simplifier en divisant par les facteurs communs.**

(a) $\frac{15}{36}$

$$15 = 3 \times 5$$
$$36 = 2^2 \times 3^2$$
$$\frac{15}{36} = \frac{3 \times 5}{2^2 \times 3^2} = \frac{5}{12}$$

(b) $\frac{65}{40}$

$$65 = 5 \times 13$$
$$40 = 2^3 \times 5$$
$$\frac{65}{40} = \frac{5 \times 13}{2^3 \times 5} = \frac{13}{8}$$

(c) $\frac{40}{68}$

$$40 = 2^3 \times 5$$
$$68 = 2^2 \times 17$$
$$\frac{40}{68} = \frac{2^3 \times 5}{2^2 \times 17} = \frac{10}{17}$$

AUNEGe, CC – BY NC ND

(d) $-\frac{24}{51}$

$$24 = 2^3 \times 3$$
$$51 = 3 \times 17$$
$$-\frac{24}{51} = -\frac{2^3 \times 3}{3 \times 17} = -\frac{8}{17}$$

(e) $\frac{12}{90}$

$$12 = 2^2 \times 3$$
$$90 = 2 \times 3^2 \times 5$$
$$\frac{12}{90} = \frac{2^2 \times 3}{2 \times 3^2 \times 5} = \frac{2}{15}$$

(f) $-\frac{52}{117}$

$$52 = 2^2 \times 13$$
$$117 = 3 \times 3 \times 13$$
$$-\frac{52}{117} = -\frac{2^2 \times 13}{3 \times 3 \times 13} = -\frac{4}{9}$$

(g) $\frac{64}{84}$

$$64 = 2^6$$
$$84 = 2^2 \times 3 \times 7$$
$$\frac{64}{84} = \frac{2^6}{2^2 \times 3 \times 7} = \frac{16}{21}$$

(h) $\frac{72}{81}$

$$72 = 2^3 \times 3^2$$
$$81 = 3^4$$
$$\frac{72}{81} = \frac{2^3 \times 3^2}{3^4} = \frac{8}{9}$$

(i) $-\frac{24}{120}$

$$24 = 2^3 \times 3$$
$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$
$$-\frac{24}{120} = -\frac{2^3 \times 3}{2^3 \times 3 \times 5} = -\frac{1}{5}$$

(j) $-\frac{450}{180}$

$$450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$$
$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$
$$-\frac{450}{180} = -\frac{2 \times 3^2 \times 5^2}{2^2 \times 3^2 \times 5} = -\frac{5}{2}$$

2. **Pour effectuer les opérations et simplifier les résultats, nous devons suivre les règles des opérations fractionnaires.**

(a) $\frac{14}{15} \times \frac{25}{49}$

$$\begin{aligned}\frac{14 \times 25}{15 \times 49} &= \frac{350}{735} \\ &= \frac{2 \times 5^2 \times 7}{3 \times 5 \times 7^2} \\ &= \frac{2 \times 5}{3 \times 7} \\ &= \frac{10}{21}\end{aligned}$$

(b) $-\frac{27}{16} \times \frac{8}{81}$

$$\begin{aligned}-\frac{27 \times 8}{16 \times 81} &= -\frac{216}{1296} \\ &= -\frac{2^3 \times 3^3}{2^4 \times 3^4} \\ &= -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

(c) $\frac{4}{9} + \frac{8}{15}$

$$\begin{aligned}\frac{4 \times 5 + 8 \times 3}{9 \times 5} &= \frac{20 + 24}{45} \\ &= \frac{44}{45}\end{aligned}$$

(d) $-\frac{5}{12} + \frac{25}{18}$

$$\begin{aligned}\frac{-5 \times 3 + 25 \times 2}{12 \times 3} &= \frac{-15 + 50}{36} \\ &= \frac{35}{36}\end{aligned}$$

(e) $\frac{22}{3} \div 6$

$$\begin{aligned}\frac{22}{3} \times \frac{1}{6} &= \frac{22}{18} \\ &= \frac{11}{9}\end{aligned}$$

AUNEGe, CC – BY NC ND

(f) $\frac{5}{12}+\frac{9}{16}$

$$\begin{aligned}\frac{5\times 4+9\times 3}{12\times 4}&=\frac{20+27}{48}\\&=\frac{47}{48}\end{aligned}$$

(g) $\frac{32}{15}+\frac{17}{10}$

$$\begin{aligned}\frac{32\times 2+17\times 3}{15\times 2}&=\frac{64+51}{30}\\&=\frac{115}{30}\\&=\frac{23}{6}\end{aligned}$$

(h) $\frac{3}{8}-\frac{17}{24}$

$$\begin{aligned}\frac{3\times 3-17}{8\times 3}&=\frac{9-17}{24}\\&=-\frac{8}{24}\\&=-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

(i) $\frac{5}{6}-\frac{4}{9}$

$$\begin{aligned}\frac{5\times 3-4\times 2}{6\times 3}&=\frac{15-8}{18}\\&=\frac{7}{18}\end{aligned}$$

(j) $\frac{11}{24}-\frac{5}{36}$

$$\begin{aligned}\frac{11\times 3-5\times 2}{24\times 3}&=\frac{33-10}{72}\\&=\frac{23}{72}\end{aligned}$$

(k) $\frac{27\times\frac{5}{9}}{\frac{2}{5}-\frac{3}{4}+\frac{1}{10}}$

AUNEGe, CC – BY NC ND

$$\frac{27\times\frac{5}{9}}{\frac{8}{20}-\frac{15}{20}+\frac{2}{20}}=\frac{27\times\frac{5}{9}}{\frac{8-15+2}{20}}$$
$$=\frac{27\times\frac{5}{9}}{\frac{-5}{20}}$$
$$=27\times\frac{5}{9}\times\frac{20}{-5}$$
$$=27\times\frac{20}{9}\times -1$$
$$=-60$$

(l) $\frac{\frac{3}{7}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{30\times\frac{5}{6}}$

$$\frac{\frac{18+28-21}{42}}{30\times\frac{5}{6}}=\frac{\frac{25}{42}}{30\times\frac{5}{6}}$$
$$=\frac{\frac{25}{42}}{25}$$
$$=\frac{25}{42}\times\frac{1}{25}$$
$$=\frac{1}{42}$$

(m) $\frac{\frac{5}{6}-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}}{\frac{35}{2}\times\frac{3}{28}}$

$$\frac{\frac{10-3+8}{12}}{\frac{105}{56}}=\frac{\frac{15}{12}}{\frac{15}{8}}$$
$$=\frac{15}{12}\times\frac{8}{15}$$
$$=\frac{8}{12}$$
$$=\frac{2}{3}$$

(n) $\frac{\frac{3}{4}\times\frac{6}{5}}{\frac{1}{8}+\frac{2}{3}-\frac{5}{12}}$

$$\frac{\frac{18}{20}}{\frac{3+16-10}{24}}=\frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{24}}$$
$$=\frac{9}{10}\times\frac{24}{9}$$
$$=\frac{12}{5}$$

AUNEGe, CC – BY NC ND

Les puissances

Questions

Utilisez les propriétés des exposants pour évaluer ou simplifier les expressions suivantes. Les réponses ne doivent comporter que des exposants positifs.

1. $\left(\frac{4}{7}\right)^2$
2. $(-2)^{-4}$
3. $\left(\frac{8}{5}\right)^{-3}$
4. $3^{-6} \times (3^{-1} \times 3^4 \times 3^{-2})^3$
5. $\frac{4^6 y^5}{4^4 y^{-2}}$
6. $\frac{z^8 z^{-3}}{(z^2 z^{-1})^2}$
7. $(5a^2 b^6)^3$
8. $\frac{18m^9 n^7}{6m^{12} n^2}$
9. $\frac{p^4 p^{-2} p^3 (p^{-1})^2}{p^{-4}}$
10. $\frac{16b^5 c^{-3}}{8b^{-1} c^2}$
11. $(3x^2 y^5)^2 (6x^{-1} y^3)^{-3}$
12. $\left(\frac{4x^{-1} yz^3}{y^{-2} z^4}\right)^2$

Réponses

1. $\left(\frac{4}{7}\right)^2$

$$\begin{aligned}\left(\frac{4}{7}\right)^2 &= \frac{4^2}{7^2} \\ &= \frac{16}{49}\end{aligned}$$

2. $(-2)^{-4}$

$$\begin{aligned}(-2)^{-4} &= \frac{1}{(-2)^4}\\ &= \frac{1}{16}\end{aligned}$$

3. -3^{-3}

$$\begin{aligned}-3^{-3} &= -\frac{1}{3^3}\\ &= -\frac{1}{27}\end{aligned}$$

4. $\left(\frac{8}{5}\right)^{-3}$

$$\begin{aligned}\left(\frac{8}{5}\right)^{-3} &= \left(\frac{5}{8}\right)^{3}\\ &= \frac{5^3}{8^3}\\ &= \frac{125}{512}\end{aligned}$$

5. $3^{-6} \times (3^{-1} \times 3^4 \times 3^{-2})^3$

$$\begin{aligned}3^{-6} \times (3^{-1+4-2})^3 &= 3^{-6} \times 3^{3\times 1}\\ &= 3^{-6} \times 3^3\\ &= 3^{-3}\\ &= \frac{1}{3^3}\\ &= \frac{1}{27}\end{aligned}$$

6. $\frac{4^6 y^5}{4^4 y^{-2}}$

$$\begin{aligned}\frac{4^6 y^5}{4^4 y^{-2}} &= 4^{6-4} \times y^{5+2}\\ &= 4^2 \times y^7\\ &= 16y^7\end{aligned}$$

7. $\frac{z^8 z^{-3}}{(z^2 z^{-1})^2}$

$$\begin{aligned}\frac{z^{8-3}}{(z^{2-1})^2} &= \frac{z^5}{(z^1)^2}\\ &= \frac{z^5}{z^2}\\ &= z^{5-2}\\ &= z^3\end{aligned}$$

8. $(5a^2b^6)^3$

$$\begin{aligned}(5a^2b^6)^3 &= 5^3 \times a^{2\times 3} \times b^{6\times 3}\\ &= 125a^6b^{18}\end{aligned}$$

AUNEGe, CC – BY NC ND

9. $\frac{18m^9n^7}{6m^{12}n^2}$

$$\begin{aligned}\frac{18m^9n^7}{6m^{12}n^2} &= \frac{18}{6}\times m^{9-12}\times n^{7-2}\\ &= 3\times m^{-3}\times n^5\\ &= 3\times\frac{n^5}{m^3}\\ &= \frac{3n^5}{m^3}\end{aligned}$$

10. $\frac{p^4p^{-2}p^3(p^{-1})^2}{p^{-4}}$

$$\begin{aligned}\frac{p^{4-2+3+(-2)}}{p^{-4}} &= \frac{p^3}{p^{-4}}\\ &= p^{3+4}\\ &= p^7\end{aligned}$$

11. $\frac{16b^5c^{-3}}{8b^{-1}c^2}$

$$\begin{aligned}\frac{16b^5c^{-3}}{8b^{-1}c^2} &= \frac{16}{8}\times b^{5-(-1)}\times c^{-3-2}\\ &= 2\times b^6\times c^{-5}\\ &= \frac{2b^6}{c^5}\end{aligned}$$

12. $(3x^2y^5)^2(6x^{-1}y^3)^{-3}$

$$\begin{aligned}(3x^2y^5)^2(6x^{-1}y^3)^{-3} &= 3^2\times x^4\times y^{10}\times 6^{-3}\times x^3\times y^{-9}\\ &= 9\times x^{4+3}\times y^{10-9}\times\frac{1}{6^3}\\ &= 9\times x^7\times y^1\times\frac{1}{216}\\ &= \frac{9x^7y}{216}\\ &= \frac{x^7y}{24}\end{aligned}$$

13. $\left(\frac{4x^{-1}yz^3}{y^{-2}z^4}\right)^2$

$$\begin{aligned}\left(\frac{4x^{-1}yz^3}{y^{-2}z^4}\right)^2 &= (4x^{-1}yz^3\times y^2z^{-4})^2\\ &= (4x^{-1}y^{1+2}z^{3-4})^2\\ &= (4x^{-1}y^3z^{-1})^2\\ &= 4^2\times x^{-2}\times y^6\times z^{-2}\\ &= 16x^{-2}y^6z^{-2}\\ &= \frac{16y^6}{x^2z^2}\end{aligned}$$

AUNEGe, CC – BY NC ND

14. $\left(\frac{x^{-3}y^4z^{-1}}{y^2(xz)^{-2}}\right)^{-2}$

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^{-3}y^4z^{-1}}{y^2(xz)^{-2}}\right)^{-2} &= \left(\frac{x^{-3}y^4z^{-1}}{y^2x^{-2}z^{-2}}\right)^{-2} \\ &= \left(\frac{x^{-3}y^4z^{-1}}{x^{-2}y^2z^{-2}}\right)^{-2} \\ &= \left(x^{-3-(-2)}y^{4-2}z^{-1-(-2)}\right)^{-2} \\ &= (x^{-1}y^2z^1)^{-2} \\ &= x^2y^{-4}z^{-2} \\ &= \frac{x^2}{y^4z^2}\end{aligned}$$

Les polynômes

Questions

1. Effectuez les opérations entre polynômes suivantes :

(a) $(4x^3 - 2x^2 + x - 1) + (-3x^3 + 5x^2 - 4x + 2)$

(b) $(2t^4 - 3t^3 + 4t^2 - t + 6) - (t^4 + 2t^3 - 3t^2 + 4t - 5)$

(c) $(3a^2b - 7ab^2 + 4b^3) + (-3a^2b + 2ab^2 - b^3)$

(d) $(5p^3q - 4pq + 6p) - (-2p^3q + 3pq - 7p)$

(e) $(6x^2y - 3xy^2 + 5y) + (-4x^2y + 7xy^2 - 2y)$

(f) $(8m^2 - 5mn + 4n) - (3m^2 + 6mn - 7n)$

(g) $(7x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1) + (-5x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 3x - 2)$

(h) $(3t^3 - 6t^2 + 2t - 4) - (t^3 + 3t^2 - 4t + 5)$

(i) $(-4a^2b + 6ab^2 - 3b^3) + (4a^2b - 5ab^2 + 2b^3)$

(j) $(-5p^3 + 3p^2q - 7pq + 4) - (2p^3 - 6p^2q + 3pq - 5)$

2. Effectuez les opérations entre polynômes suivantes :

(a) $4xy(2x^2 - 3y^2)$

AUNEGe, CC – BY NC ND

(b) $(5t-3)(4t+6)$

(c) $-3(8-x^2)+4x(3x-2)$

(d) $(2u+5v)(3u-4v)$

(e) $6ab(a^2-2b^2)$

(f) $(7p-2)(3p+5)$

(g) $-5(6-y^2)+2y(4y-3)$

(h) $(4m+3n)(5m-2n)$

(i) $3xz(2x^2-z^2)$

(j) $(6r-4)(2r+3)$

Réponses

1. (a) $(4x^3-2x^2+x-1)+(-3x^3+5x^2-4x+2)$

$$\begin{aligned}&4x^3-2x^2+x-1+(-3x^3+5x^2-4x+2)\\&=(4x^3-3x^3)+(-2x^2+5x^2)+(x-4x)+(-1+2)\\&=x^3+3x^2-3x+1\end{aligned}$$

(b) $(2t^4-3t^3+4t^2-t+6)-(t^4+2t^3-3t^2+4t-5)$

$$\begin{aligned}&2t^4-3t^3+4t^2-t+6-(t^4+2t^3-3t^2+4t-5)\\&=2t^4-3t^3+4t^2-t+6-t^4-2t^3+3t^2-4t+5\\&=(2t^4-t^4)+(-3t^3-2t^3)+(4t^2+3t^2)+(-t-4t)+(6+5)\\&=t^4-5t^3+7t^2-5t+11\end{aligned}$$

(c) $(3a^2b-7ab^2+4b^3)+(-3a^2b+2ab^2-b^3)$

$$\begin{aligned}&3a^2b-7ab^2+4b^3+(-3a^2b+2ab^2-b^3)\\&=(3a^2b-3a^2b)+(-7ab^2+2ab^2)+(4b^3-b^3)\\&=-5ab^2+3b^3\end{aligned}$$

(d) $(5p^3q-4pq+6p)-(-2p^3q+3pq-7p)$

$$\begin{aligned}&5p^3q-4pq+6p-(-2p^3q+3pq-7p)\\&=5p^3q-4pq+6p+2p^3q-3pq+7p\\&=(5p^3q+2p^3q)+(-4pq-3pq)+(6p+7p)\\&=7p^3q-7pq+13p\end{aligned}$$

AUNEGe, CC – BY NC ND

(e) $(6x^2y - 3xy^2 + 5y) + (-4x^2y + 7xy^2 - 2y)$

$$\begin{aligned}&6x^2y - 3xy^2 + 5y + (-4x^2y + 7xy^2 - 2y)\\&= (6x^2y - 4x^2y) + (-3xy^2 + 7xy^2) + (5y - 2y)\\&= 2x^2y + 4xy^2 + 3y\end{aligned}$$

(f) $(8m^2 - 5mn + 4n) - (3m^2 + 6mn - 7n)$

$$\begin{aligned}&8m^2 - 5mn + 4n - (3m^2 + 6mn - 7n)\\&= 8m^2 - 5mn + 4n - 3m^2 - 6mn + 7n\\&= (8m^2 - 3m^2) + (-5mn - 6mn) + (4n + 7n)\\&= 5m^2 - 11mn + 11n\end{aligned}$$

(g) $(7x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1) + (-5x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 3x - 2)$

$$\begin{aligned}&7x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1 + (-5x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 3x - 2)\\&= (7x^4 - 5x^4) + (-2x^3 + 4x^3) + (3x^2 - 2x^2) + (-x + 3x) + (1 - 2)\\&= 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 1\end{aligned}$$

(h) $(3t^3 - 6t^2 + 2t - 4) - (t^3 + 3t^2 - 4t + 5)$

$$\begin{aligned}&3t^3 - 6t^2 + 2t - 4 - (t^3 + 3t^2 - 4t + 5)\\&= 3t^3 - 6t^2 + 2t - 4 - t^3 - 3t^2 + 4t - 5\\&= (3t^3 - t^3) + (-6t^2 - 3t^2) + (2t + 4t) + (-4 - 5)\\&= 2t^3 - 9t^2 + 6t - 9\end{aligned}$$

(i) $(-4a^2b + 6ab^2 - 3b^3) + (4a^2b - 5ab^2 + 2b^3)$

$$\begin{aligned}&-4a^2b + 6ab^2 - 3b^3 + 4a^2b - 5ab^2 + 2b^3\\&= (-4a^2b + 4a^2b) + (6ab^2 - 5ab^2) + (-3b^3 + 2b^3)\\&= ab^2 - b^3\end{aligned}$$

(j) $(-5p^3 + 3p^2q - 7pq + 4) - (2p^3 - 6p^2q + 3pq - 5)$

$$\begin{aligned}&-5p^3 + 3p^2q - 7pq + 4 - (2p^3 - 6p^2q + 3pq - 5)\\&= -5p^3 + 3p^2q - 7pq + 4 - 2p^3 + 6p^2q - 3pq + 5\\&= (-5p^3 - 2p^3) + (3p^2q + 6p^2q) + (-7pq - 3pq) + (4 + 5)\\&= -7p^3 + 9p^2q - 10pq + 9\end{aligned}$$

2. (a) $4xy(2x^2 - 3y^2)$

$$\begin{aligned}4xy(2x^2 - 3y^2) &= 4xy \cdot 2x^2 - 4xy \cdot 3y^2\\&= 8x^3y - 12xy^3\end{aligned}$$

(b) $(5t - 3)(4t + 6)$

AUNEGe, CC – BY NC ND

$$
\begin{aligned}
(5t-3)(4t+6) &= 5t\cdot 4t + 5t\cdot 6 - 3\cdot 4t - 3\cdot 6\\
&= 20t^2 + 30t - 12t - 18\\
&= 20t^2 + 18t - 18
\end{aligned}
$$

(c) $-3(8-x^2)+4x(3x-2)$

$$
\begin{aligned}
-3(8-x^2)+4x(3x-2) &= -3\cdot 8 + 3x^2 + 4x\cdot 3x - 4x\cdot 2\\
&= -24 + 3x^2 + 12x^2 - 8x\\
&= 15x^2 - 8x - 24
\end{aligned}
$$

(d) $(2u+5v)(3u-4v)$

$$
\begin{aligned}
(2u+5v)(3u-4v) &= 2u\cdot 3u + 2u\cdot(-4v) + 5v\cdot 3u + 5v\cdot(-4v)\\
&= 6u^2 - 8uv + 15uv - 20v^2\\
&= 6u^2 + 7uv - 20v^2
\end{aligned}
$$

(e) $6ab(a^2-2b^2)$

$$
\begin{aligned}
6ab(a^2-2b^2) &= 6ab\cdot a^2 - 6ab\cdot 2b^2\\
&= 6a^3b - 12ab^3
\end{aligned}
$$

(f) $(7p-2)(3p+5)$

$$
\begin{aligned}
(7p-2)(3p+5) &= 7p\cdot 3p + 7p\cdot 5 - 2\cdot 3p - 2\cdot 5\\
&= 21p^2 + 35p - 6p - 10\\
&= 21p^2 + 29p - 10
\end{aligned}
$$

(g) $-5(6-y^2)+2y(4y-3)$

$$
\begin{aligned}
-5(6-y^2)+2y(4y-3) &= -5\cdot 6 + 5y^2 + 2y\cdot 4y - 2y\cdot 3\\
&= -30 + 5y^2 + 8y^2 - 6y\\
&= 13y^2 - 6y - 30
\end{aligned}
$$

(h) $(4m+3n)(5m-2n)$

$$
\begin{aligned}
(4m+3n)(5m-2n) &= 4m\cdot 5m + 4m\cdot(-2n) + 3n\cdot 5m + 3n\cdot(-2n)\\
&= 20m^2 - 8mn + 15mn - 6n^2\\
&= 20m^2 + 7mn - 6n^2
\end{aligned}
$$

(i) $3xz(2x^2-z^2)$

$$
\begin{aligned}
3xz(2x^2-z^2) &= 3xz\cdot 2x^2 - 3xz\cdot z^2\\
&= 6x^3z - 3xz^3
\end{aligned}
$$

(j) $(6r-4)(2r+3)$

AUNEGe, CC – BY NC ND

$$\begin{aligned}(6r-4)(2r+3) &= 6r\cdot 2r + 6r\cdot 3 - 4\cdot 2r - 4\cdot 3\\ &= 12r^2 + 18r - 8r - 12\\ &= 12r^2 + 10r - 12\end{aligned}$$

Développement et factorisation

Identités remarquables

Questions

Factorisez :

1. $x^2 + 6x + 9$
2. $4y^2 - 12y + 9$
3. $a^2 - 10a + 25$
4. $16z^2 - 8z + 1$
5. $9m^2 + 24m + 16$
6. $x^2 - 4$
7. $25y^2 - 1$
8. $49a^2 - 64$
9. $36z^2 - 81$
10. $100m^2 - 16$
11. $t^2 - 6t + 9$
12. $25x^2 - 10x + 1$
13. $4y^2 - 25$
14. $a^2 - 64$
15. $16z^2 - 1$

Réponses

1. $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$
2. $4y^2 - 12y + 9 = (2y-3)^2$
3. $a^2 - 10a + 25 = (a-5)^2$
4. $16z^2 - 8z + 1 = (4z-1)^2$
5. $9m^2 + 24m + 16 = (3m+4)^2$
6. $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$
7. $25y^2 - 1 = (5y-1)(5y+1)$

AUNEGe, CC – BY NC ND

8. $49a^2 - 64 = (7a - 8)(7a + 8)$
9. $36z^2 - 81 = (6z - 9)(6z + 9)$
10. $100m^2 - 16 = (10m - 4)(10m + 4)$
11. $t^2 - 6t + 9 = (t - 3)^2$
12. $25x^2 - 10x + 1 = (5x - 1)^2$
13. $4y^2 - 25 = (2y - 5)(2y + 5)$
14. $a^2 - 64 = (a - 8)(a + 8)$
15. $16z^2 - 1 = (4z - 1)(4z + 1)$

Trinôme du second degré

Questions

Factorisez les expressions suivantes :

1. $x^2 + 5x + 6$
2. $2y^2 - 4y - 6$
3. $3a^2 + 7a + 2$
4. $4z^2 - 12z + 9$
5. $m^2 - 3m - 10$
6. $5t^2 + 8t + 3$

Réponses

1. $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$
2. $2y^2 - 4y - 6 = 2(y^2 - 2y - 3) = 2(y - 3)(y + 1)$
3. $3a^2 + 7a + 2 = (3a + 1)(a + 2)$
4. $4z^2 - 12z + 9 = (2z - 3)^2$
5. $m^2 - 3m - 10 = (m - 5)(m + 2)$
6. $5t^2 + 8t + 3 = (5t + 3)(t + 1)$

Méthodes de factorisation

Questions

Factorisez ces expressions :

1. $6x^2 - 15x$

2. $8y^3 + 12y^2$
3. $4a^2 - 20a + 25$
4. $x^2 - 9$
5. $5z^2 + 10z$
6. $3m^2 + 12m + 12$
7. $2x^2 + 6x - 8$
8. $x^2 + 4x + 4$
9. $12p^2q + 8pq$
10. $3a^2b - 9ab^2 + 6ab$
11. $6xy + 9x - 4y - 6$
12. $2x^2 + 3xy + y^2 - 2y$

Réponses

1. $6x^2 - 15x = 3x(2x - 5)$
2. $8y^3 + 12y^2 = 4y^2(2y + 3)$
3. $4a^2 - 20a + 25 = (2a - 5)^2$
4. $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$
5. $5z^2 + 10z = 5z(z + 2)$
6. $3m^2 + 12m + 12 = 3(m^2 + 4m + 4) = 3(m + 2)^2$
7. $2x^2 + 6x - 8 = 2(x^2 + 3x - 4) = 2(x + 4)(x - 1)$
8. $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$
9. $12p^2q + 8pq = 4pq(3p + 2)$
10. $3a^2b - 9ab^2 + 6ab = 3ab(a - 3b + 2)$
11. $6xy + 9x - 4y - 6 = 3x(2y + 3) - 2(2y + 3) = (3x - 2)(2y + 3)$
12. $2x^2 + 3xy + y^2 - 2y = x(2x + 3y) + y(y - 2) = (x + y)(2x + y - 2)$

AUNEGe, CC – BY NC ND

Équations et inéquations

Équations

Questions

1. **Résolvez les équations suivantes.**

(a) $3x - 5 = 10$

(b) $-2u + 7 = -5$

(c) $\frac{y}{5} + 2 = -1$

(d) $-\frac{t}{4} - 6 = 2$

(e) $\frac{4x}{3} - 1 = 5$

(f) $-\frac{7y}{2} + 4 = -10$

(g) $6t + \frac{3}{4} = \frac{5}{2}$

(h) $-4x - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$

(i) $\frac{5x}{6} - 3 = \frac{1}{2}$

(j) $-\frac{3u}{7} + \frac{2}{5} = -\frac{1}{3}$

(k) $2x + \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$

(l) $-5y - \frac{2}{9} = \frac{4}{3}$

2. **Résolvez les équations quadratiques suivantes.**

(a) $x^2 - 4x + 4 = 0$

(b) $2u^2 + 3u - 5 = 0$

(c) $y^2 - 6y + 9 = 0$

(d) $t^2 + 5t + 6 = 0$

(e) $3x^2 - x - 2 = 0$

(f) $4y^2 - 4y + 1 = 0$

(g) $5t^2 - 3t = 0$

(h) $x^2 + 2x - 8 = 0$

(i) $2u^2 - 8u + 6 = 0$

(j) $3y^2 + 7y + 2 = 0$

(k) $t^2 - 4 = 0$

(l) $x^2 - 9x + 14 = 0$

3. Résolvez les équations rationnelles suivantes.

(a) $\frac{x+3}{x-1} = 2$

(b) $\frac{2u+5}{u-4} = 3$

(c) $\frac{y-2}{y+3} = -1$

(d) $\frac{t+4}{t-2} = 3$

(e) $\frac{3x-1}{x+2} = \frac{2}{3}$

(f) $\frac{4y+7}{2y-1} = 2$

(g) $\frac{5t-3}{t+5} = 1$

(h) $\frac{x-2}{x+4} = \frac{1}{2}$

(i) $\frac{2u+1}{u-3} = \frac{5}{4}$

(j) $\frac{3y-4}{2y+5} = \frac{1}{3}$

(k) $\frac{t+1}{t-3} = \frac{4}{3}$

(l) $\frac{x-5}{x+1} = \frac{3}{4}$

Réponses

1. (a) $3x - 5 = 10$

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= 10 \\ \Leftrightarrow 3x &= 15 \\ \Leftrightarrow x &= 5 \end{aligned}$$

(b) $-2u + 7 = -5$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -2u + 7 &= -5 \\ \Leftrightarrow -2u &= -12 \\ \Leftrightarrow u &= 6 \end{aligned}$$

(c) $\frac{y}{5} + 2 = -1$

$$\begin{aligned} \frac{y}{5} + 2 &= -1 \\ \Leftrightarrow \frac{y}{5} &= -3 \\ \Leftrightarrow y &= -15 \end{aligned}$$

(d) $-\frac{t}{4} - 6 = 2$

$$\begin{aligned} -\frac{t}{4} - 6 &= 2 \\ \Leftrightarrow -\frac{t}{4} &= 8 \\ \Leftrightarrow t &= -32 \end{aligned}$$

(e) $\frac{4x}{3} - 1 = 5$

$$\begin{aligned} \frac{4x}{3} - 1 &= 5 \\ \Leftrightarrow \frac{4x}{3} &= 6 \\ \Leftrightarrow 4x &= 18 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{18}{4} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

(f) $-\frac{7y}{2} + 4 = -10$

AUNEGe, CC – BY NC ND

$$
\begin{aligned}
&-\frac{7y}{2}+4=-10\\
&\Leftrightarrow -\frac{7y}{2}=-14\\
&\Leftrightarrow 7y=28\\
&\Leftrightarrow y=4
\end{aligned}
$$

(g) $6t+\frac{3}{4}=\frac{5}{2}$

$$
\begin{aligned}
&6t+\frac{3}{4}=\frac{5}{2}\\
&\Leftrightarrow 6t=\frac{5}{2}-\frac{3}{4}\\
&\Leftrightarrow 6t=\frac{10}{4}-\frac{3}{4}\\
&\Leftrightarrow 6t=\frac{7}{4}\\
&\Leftrightarrow t=\frac{7}{24}
\end{aligned}
$$

(h) $-4x-\frac{1}{3}=\frac{7}{6}$

$$
\begin{aligned}
&-4x-\frac{1}{3}=\frac{7}{6}\\
&\Leftrightarrow -4x=\frac{7}{6}+\frac{1}{3}\\
&\Leftrightarrow -4x=\frac{7}{6}+\frac{2}{6}\\
&\Leftrightarrow -4x=\frac{9}{6}\\
&\Leftrightarrow -4x=\frac{3}{2}\\
&\Leftrightarrow x=-\frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

(i) $\frac{5x}{6}-3=\frac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
&\frac{5x}{6}-3=\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \frac{5x}{6}=\frac{1}{2}+3\\
&\Leftrightarrow \frac{5x}{6}=\frac{1}{2}+\frac{6}{2}\\
&\Leftrightarrow \frac{5x}{6}=\frac{7}{2}\\
&\Leftrightarrow 5x=\frac{7\times 6}{2}\\
&\Leftrightarrow 5x=21\\
&\Leftrightarrow x=\frac{21}{5}
\end{aligned}
$$

AUNEGe, CC – BY NC ND

(j) $-\frac{3u}{7}+\frac{2}{5}=-\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} -\frac{3u}{7}+\frac{2}{5} &= -\frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow -\frac{3u}{7} &= -\frac{1}{3}-\frac{2}{5} \\ \Leftrightarrow -\frac{3u}{7} &= -\frac{5}{15}-\frac{6}{15} \\ \Leftrightarrow -\frac{3u}{7} &= -\frac{11}{15} \\ \Leftrightarrow 3u &= \frac{77}{15} \\ \Leftrightarrow u &= \frac{77}{45} \end{aligned}$$

(k) $2x+\frac{1}{4}=\frac{7}{8}$

$$\begin{aligned} 2x+\frac{1}{4} &= \frac{7}{8} \\ \Leftrightarrow 2x &= \frac{7}{8}-\frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow 2x &= \frac{7}{8}-\frac{2}{8} \\ \Leftrightarrow 2x &= \frac{5}{8} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5}{16} \end{aligned}$$

(1) $-5y-\frac{2}{9}=\frac{4}{3}$

$$\begin{aligned} -5y-\frac{2}{9} &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow -5y &= \frac{4}{3}+\frac{2}{9} \\ \Leftrightarrow -5y &= \frac{12}{9}+\frac{2}{9} \\ \Leftrightarrow -5y &= \frac{14}{9} \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{14}{45} \end{aligned}$$

2. **Résolvez les équations quadratiques suivantes.**

(a) $x^2-4x+4=0$

$$\begin{aligned} x^2-4x+4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \end{aligned}$$

(b) $2u^2+3u-5=0$

AUNEGe, CC – BY NC ND

$$
\begin{aligned}
2u^2 + 3u - 5 = 0 & \\
\Leftrightarrow u &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} \\
\Leftrightarrow u &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} \\
\Leftrightarrow u &= \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4} \\
\Leftrightarrow u &= \frac{-3 \pm 7}{4} \\
\Leftrightarrow u &= 1 \text{ ou } u = -\frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

(c) $y^2 - 6y + 9 = 0$

$$
\begin{aligned}
y^2 - 6y + 9 &= 0 \\
\Leftrightarrow (y-3)^2 &= 0 \\
\Leftrightarrow y &= 3
\end{aligned}
$$

(d) $t^2 + 5t + 6 = 0$

$$
\begin{aligned}
t^2 + 5t + 6 &= 0 \\
\Leftrightarrow (t+2)(t+3) &= 0 \\
\Leftrightarrow t &= -2 \text{ ou } t = -3
\end{aligned}
$$

(e) $3x^2 - x - 2 = 0$

$$
\begin{aligned}
3x^2 - x - 2 = 0 & \\
\Leftrightarrow x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} \\
\Leftrightarrow x &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{6} \\
\Leftrightarrow x &= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{6} \\
\Leftrightarrow x &= \frac{1 \pm 5}{6} \\
\Leftrightarrow x &= 1 \text{ ou } x = -\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

(f) $4y^2 - 4y + 1 = 0$

$$
\begin{aligned}
4y^2 - 4y + 1 &= 0 \\
\Leftrightarrow (2y-1)^2 &= 0 \\
\Leftrightarrow y &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(g) $5t^2 - 3t = 0$

AUNEGe, CC – BY NC ND

$$
\begin{aligned}
5t^2 - 3t &= 0 \\
\Leftrightarrow t(5t-3) &= 0 \\
\Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t &= \frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

(h) $x^2 + 2x - 8 = 0$

$$
\begin{aligned}
x^2 + 2x - 8 &= 0 \\
\Leftrightarrow (x+4)(x-2) &= 0 \\
\Leftrightarrow x = -4 \text{ ou } x &= 2
\end{aligned}
$$

(i) $2u^2 - 8u + 6 = 0$

$$
\begin{aligned}
&2u^2 - 8u + 6 = 0 \\
&\Leftrightarrow u = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} \\
&\Leftrightarrow u = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{4} \\
&\Leftrightarrow u = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{4} \\
&\Leftrightarrow u = \frac{8 \pm 4}{4} \\
&\Leftrightarrow u = 3 \text{ ou } u = 1
\end{aligned}
$$

(j) $3y^2 + 7y + 2 = 0$

$$
\begin{aligned}
&3y^2 + 7y + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow y = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} \\
&\Leftrightarrow y = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} \\
&\Leftrightarrow y = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{6} \\
&\Leftrightarrow y = \frac{-7 \pm 5}{6} \\
&\Leftrightarrow y = -\frac{1}{3} \text{ ou } y = -2
\end{aligned}
$$

(k) $t^2 - 4 = 0$

$$
\begin{aligned}
t^2 - 4 &= 0 \\
\Leftrightarrow (t-2)(t+2) &= 0 \\
\Leftrightarrow t = 2 \text{ ou } t &= -2
\end{aligned}
$$

(l) $x^2 - 9x + 14 = 0$

$$
\begin{aligned}
x^2 - 9x + 14 &= 0 \\
\Leftrightarrow (x-7)(x-2) &= 0 \\
\Leftrightarrow x = 7 \text{ ou } x &= 2
\end{aligned}
$$

AUNEGe, CC – BY NC ND

3. Résolvez les équations rationnelles suivantes.

(a) $\frac{x+3}{x-1} = 2$

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x-1} &= 2 \\ \Leftrightarrow x+3 &= 2(x-1) \\ \Leftrightarrow x+3 &= 2x-2 \\ \Leftrightarrow 3+2 &= x \\ \Leftrightarrow x &= 5 \end{aligned}$$

(b) $\frac{2u+5}{u-4} = 3$

$$\begin{aligned} \frac{2u+5}{u-4} &= 3 \\ \Leftrightarrow 2u+5 &= 3(u-4) \\ \Leftrightarrow 2u+5 &= 3u-12 \\ \Leftrightarrow 5+12 &= u \\ \Leftrightarrow u &= 17 \end{aligned}$$

(c) $\frac{y-2}{y+3} = -1$

$$\begin{aligned} \frac{y-2}{y+3} &= -1 \\ \Leftrightarrow y-2 &= -1(y+3) \\ \Leftrightarrow y-2 &= -y-3 \\ \Leftrightarrow y+y &= -3+2 \\ \Leftrightarrow 2y &= -1 \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(d) $\frac{t+4}{t-2} = 3$

$$\begin{aligned} \frac{t+4}{t-2} &= 3 \\ \Leftrightarrow t+4 &= 3(t-2) \\ \Leftrightarrow t+4 &= 3t-6 \\ \Leftrightarrow 4+6 &= 3t-t \\ \Leftrightarrow 10 &= 2t \\ \Leftrightarrow t &= 5 \end{aligned}$$

(e) $\frac{3x-1}{x+2} = \frac{2}{3}$

AUNEGe, CC – BY NC ND

$$\begin{aligned} \frac{3x-1}{x+2} &= \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow 3(3x-1) &= 2(x+2) \\ \Leftrightarrow 9x-3 &= 2x+4 \\ \Leftrightarrow 9x-2x &= 4+3 \\ \Leftrightarrow 7x &= 7 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

(f) $\frac{4y+7}{2y-1} = 2$

$$\begin{aligned} \frac{4y+7}{2y-1} &= 2 \\ \Leftrightarrow 4y+7 &= 2(2y-1) \\ \Leftrightarrow 4y+7 &= 4y-2 \\ \Leftrightarrow 7 &= -2 \text{ (pas de solution)} \end{aligned}$$

(g) $\frac{5t-3}{t+5} = 1$

$$\begin{aligned} \frac{5t-3}{t+5} &= 1 \\ \Leftrightarrow 5t-3 &= t+5 \\ \Leftrightarrow 5t-t &= 5+3 \\ \Leftrightarrow 4t &= 8 \\ \Leftrightarrow t &= 2 \end{aligned}$$

(h) $\frac{x-2}{x+4} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x+4} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2(x-2) &= 1(x+4) \\ \Leftrightarrow 2x-4 &= x+4 \\ \Leftrightarrow 2x-x &= 4+4 \\ \Leftrightarrow x &= 8 \end{aligned}$$

(i) $\frac{2u+1}{u-3} = \frac{5}{4}$

$$\begin{aligned} \frac{2u+1}{u-3} &= \frac{5}{4} \\ \Leftrightarrow 4(2u+1) &= 5(u-3) \\ \Leftrightarrow 8u+4 &= 5u-15 \\ \Leftrightarrow 8u-5u &= -15-4 \\ \Leftrightarrow 3u &= -19 \\ \Leftrightarrow u &= -\frac{19}{3} \end{aligned}$$

(j) $\frac{3y-4}{2y+5} = \frac{1}{3}$

AUNEGe, CC – BY NC ND

$$\begin{aligned}
\frac{3y-4}{2y+5} &= \frac{1}{3} \\
\Leftrightarrow 3(3y-4) &= 1(2y+5) \\
\Leftrightarrow 9y-12 &= 2y+5 \\
\Leftrightarrow 9y-2y &= 5+12 \\
\Leftrightarrow 7y &= 17 \\
\Leftrightarrow y &= \frac{17}{7}
\end{aligned}$$

(k) $\frac{t+1}{t-3} = \frac{4}{3}$

$$\begin{aligned}
\frac{t+1}{t-3} &= \frac{4}{3} \\
\Leftrightarrow 3(t+1) &= 4(t-3) \\
\Leftrightarrow 3t+3 &= 4t-12 \\
\Leftrightarrow 3+12 &= 4t-3t \\
\Leftrightarrow 15 &= t \\
\Leftrightarrow t &= 15
\end{aligned}$$

(l) $\frac{x-5}{x+1} = \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}
\frac{x-5}{x+1} &= \frac{3}{4} \\
\Leftrightarrow 4(x-5) &= 3(x+1) \\
\Leftrightarrow 4x-20 &= 3x+3 \\
\Leftrightarrow 4x-3x &= 3+20 \\
\Leftrightarrow x &= 23
\end{aligned}$$

Inéquations

Questions

1. **Résolvez les inéquations linéaires suivantes.**

(a) $2x - 3 < 5$

(b) $4u + 7 \geq 3u - 2$

(c) $\frac{y}{3} + 2 > 4$

(d) $-\frac{t}{5} - 1 \leq 2$

(e) $\frac{3x}{4} - 1 < 2$

(f) $-\frac{5y}{6} + 3 \geq -2$

AUNEGe, CC – BY NC ND

(g) $5t + \frac{2}{3} < \frac{7}{9}$

(h) $-3x + \frac{4}{5} > -\frac{1}{2}$

(i) $\frac{2x}{3} + 1 \leq \frac{5}{2}$

(j) $-\frac{u}{4} - \frac{3}{2} > 1$

(k) $\frac{x}{2} + 3 \leq 6$

(l) $-4y - \frac{5}{3} \geq \frac{2}{3}$

2. Résolvez les inéquations quadratiques suivantes.

(a) $x^2 - 4x + 3 > 0$

(b) $2u^2 + 3u - 2 \leq 0$

(c) $y^2 - 5y + 6 \geq 0$

(d) $t^2 + t - 6 < 0$

(e) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

(f) $3y^2 - 2y - 1 \geq 0$

(g) $4t^2 + 4t - 3 > 0$

(h) $x^2 + 2x - 8 \geq 0$

(i) $2u^2 - 8u + 6 < 0$

(j) $y^2 + 4y + 4 \leq 0$

(k) $t^2 - 4t + 4 > 0$

(l) $x^2 - x - 6 \geq 0$

3. Résolvez les inéquations rationnelles suivantes.

AUNEGe, CC – BY NC ND

(a) $\frac{x+3}{x-1} > 2$

(b) $\frac{2u+5}{u-4} \leq 3$

(c) $\frac{y-2}{y+3} \geq -1$

(d) $\frac{t+4}{t-2} < 3$

(e) $\frac{3x-1}{x+2} \geq \frac{2}{3}$

(f) $\frac{4y+7}{2y-1} > 2$

(g) $\frac{5t-3}{t+5} < 1$

(h) $\frac{x-2}{x+4} \leq \frac{1}{2}$

(i) $\frac{2u+1}{u-3} \geq \frac{5}{4}$

(j) $\frac{3y-4}{2y+5} < \frac{1}{3}$

(k) $\frac{t+1}{t-3} \leq \frac{4}{3}$

(l) $\frac{x-5}{x+1} > \frac{3}{4}$

Réponses

1. Résolvez les inéquations linéaires suivantes.

(a) $2x - 3 < 5$

$$\begin{aligned} 2x - 3 &< 5 \\ \Leftrightarrow 2x &< 8 \\ \Leftrightarrow x &< 4 \end{aligned}$$

(b) $4u + 7 \geq 3u - 2$

$$\begin{aligned} 4u + 7 &\geq 3u - 2 \\ \Leftrightarrow 4u - 3u &\geq -2 - 7 \\ \Leftrightarrow u &\geq -9 \end{aligned}$$

AUNEGe, CC – BY NC ND

(c) $\frac{y}{3}+2>4$

$$\begin{gathered}\frac{y}{3}+2>4\\ \Leftrightarrow \frac{y}{3}>2\\ \Leftrightarrow y>6\end{gathered}$$

(d) $-\frac{t}{5}-1\leq 2$

$$\begin{gathered}-\frac{t}{5}-1\leq 2\\ \Leftrightarrow -\frac{t}{5}\leq 3\\ \Leftrightarrow t\geq -15\end{gathered}$$

(e) $\frac{3x}{4}-1<2$

$$\begin{gathered}\frac{3x}{4}-1<2\\ \Leftrightarrow \frac{3x}{4}<3\\ \Leftrightarrow 3x<12\\ \Leftrightarrow x<4\end{gathered}$$

(f) $-\frac{5y}{6}+3\geq -2$

$$\begin{gathered}-\frac{5y}{6}+3\geq -2\\ \Leftrightarrow -\frac{5y}{6}\geq -5\\ \Leftrightarrow \frac{5y}{6}\leq 5\\ \Leftrightarrow 5y\leq 30\\ \Leftrightarrow y\leq 6\end{gathered}$$

(g) $5t+\frac{2}{3}<\frac{7}{9}$

$$\begin{gathered}5t+\frac{2}{3}<\frac{7}{9}\\ \Leftrightarrow 5t<\frac{7}{9}-\frac{2}{3}\\ \Leftrightarrow 5t<\frac{7}{9}-\frac{6}{9}\\ \Leftrightarrow 5t<\frac{1}{9}\\ \Leftrightarrow t<\frac{1}{45}\end{gathered}$$

AUNEGe, CC – BY NC ND

(h) $-3x+\frac{4}{5}>-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} & -3x+\frac{4}{5}>-\frac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow -3x>-\frac{1}{2}-\frac{4}{5} \\ & \Leftrightarrow -3x>-\frac{9}{10} \\ & \Leftrightarrow 3x<\frac{9}{10} \\ & \Leftrightarrow x<\frac{3}{10} \end{aligned}$$

(i) $\frac{2x}{3}+1\leq\frac{5}{2}$

$$\begin{aligned} & \frac{2x}{3}+1\leq\frac{5}{2} \\ & \Leftrightarrow \frac{2x}{3}\leq\frac{5}{2}-1 \\ & \Leftrightarrow \frac{2x}{3}\leq\frac{3}{2} \\ & \Leftrightarrow 2x\leq\frac{9}{2} \\ & \Leftrightarrow x\leq\frac{9}{4} \end{aligned}$$

(j) $-\frac{u}{4}-\frac{3}{2}>1$

$$\begin{aligned} & -\frac{u}{4}-\frac{3}{2}>1 \\ & \Leftrightarrow -\frac{u}{4}>1+\frac{3}{2} \\ & \Leftrightarrow -\frac{u}{4}>\frac{5}{2} \\ & \Leftrightarrow u<-10 \end{aligned}$$

(k) $\frac{x}{2}+3\leq 6$

$$\begin{aligned} & \frac{x}{2}+3\leq 6 \\ & \Leftrightarrow \frac{x}{2}\leq 3 \\ & \Leftrightarrow x\leq 6 \end{aligned}$$

(1) $-4y-\frac{5}{3}\geq\frac{2}{3}$

AUNEGe, CC – BY NC ND

$$
\begin{aligned}
-4y - \frac{5}{3} &\geq \frac{2}{3} \\
\Leftrightarrow -4y &\geq \frac{2}{3} + \frac{5}{3} \\
\Leftrightarrow -4y &\geq \frac{7}{3} \\
\Leftrightarrow y &\leq -\frac{7}{12}
\end{aligned}
$$

2. Résolvez les inéquations quadratiques suivantes.

(a) $x^2 - 4x + 3 > 0$

$$
\begin{aligned}
x^2 - 4x + 3 > 0 \\
\Leftrightarrow (x-1)(x-3) > 0 \\
\Leftrightarrow x < 1 \text{ ou } x > 3
\end{aligned}
$$

(b) $2u^2 + 3u - 2 \leq 0$

$$
\begin{aligned}
2u^2 + 3u - 2 \leq 0 \\
\Leftrightarrow (2u-1)(u+2) \leq 0 \\
\Leftrightarrow -2 \leq u \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(c) $y^2 - 5y + 6 \geq 0$

$$
\begin{aligned}
y^2 - 5y + 6 \geq 0 \\
\Leftrightarrow (y-2)(y-3) \geq 0 \\
\Leftrightarrow y \leq 2 \text{ ou } y \geq 3
\end{aligned}
$$

(d) $t^2 + t - 6 < 0$

$$
\begin{aligned}
t^2 + t - 6 < 0 \\
\Leftrightarrow (t+3)(t-2) < 0 \\
\Leftrightarrow -3 < t < 2
\end{aligned}
$$

(e) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

$$
\begin{aligned}
x^2 - 6x + 9 \leq 0 \\
\Leftrightarrow (x-3)^2 \leq 0 \\
\Leftrightarrow x = 3
\end{aligned}
$$

(f) $3y^2 - 2y - 1 \geq 0$

$$
\begin{aligned}
3y^2 - 2y - 1 \geq 0 \\
\Leftrightarrow (3y+1)(y-1) \geq 0 \\
\Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{3} \text{ ou } y \geq 1
\end{aligned}
$$

(g) $4t^2 + 4t - 3 > 0$

$$\begin{aligned} & 4t^2 + 4t - 3 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & (2t+3)(2t-1) > 0 \\ & \Leftrightarrow t < -\frac{3}{2} \text{ ou } t > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(h) $x^2 + 2x - 8 \geq 0$

$$\begin{aligned} & x^2 + 2x - 8 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+4)(x-2) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow x \leq -4 \text{ ou } x \geq 2 \end{aligned}$$

(i) $2u^2 - 8u + 6 < 0$

$$\begin{aligned} & 2u^2 - 8u + 6 < 0 \\ \Leftrightarrow\ & (u-1)(u-3) < 0 \\ \Leftrightarrow\ & 1 < u < 3 \end{aligned}$$

(j) $y^2 + 4y + 4 \leq 0$

$$\begin{aligned} & y^2 + 4y + 4 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (y+2)^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & y = -2 \end{aligned}$$

(k) $t^2 - 4t + 4 > 0$

$$\begin{aligned} & t^2 - 4t + 4 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & (t-2)^2 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & t \neq 2 \end{aligned}$$

(l) $x^2 - x - 6 \geq 0$

$$\begin{aligned} & x^2 - x - 6 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-3)(x+2) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow x \leq -2 \text{ ou } x \geq 3 \end{aligned}$$

3. Résolvez les inéquations rationnelles suivantes.

(a) $\frac{x+3}{x-1} > 2$

$$\begin{aligned} & \frac{x+3}{x-1} > 2 \\ & x + 3 > 2(x-1) \\ & x + 3 > 2x - 2 \\ & 3 + 2 > x \\ & 5 > x \\ & x < 5 \text{ et } x \neq 1 \end{aligned}$$

AUNEGe, CC – BY NC ND

Solution : $]-\infty, 1[\cup]1,5[$

(b) $\frac{2u+5}{u-4} \leq 3$

$$\begin{aligned}
&\frac{2u+5}{u-4} \leq 3 \\
&2u+5 \leq 3(u-4) \\
&2u+5 \leq 3u-12 \\
&5+12 \leq u \\
&17 \leq u \\
&u \geq 17 \text{ et } u \neq 4
\end{aligned}$$

Solution : $[17, +\infty[$

(c) $\frac{y-2}{y+3} \geq -1$

$$\begin{aligned}
&\frac{y-2}{y+3} \geq -1 \\
&y-2 \geq -(y+3) \\
&y-2 \geq -y-3 \\
&2y \geq -1 \\
&y \geq -\frac{1}{2} \text{ et } y \neq -3
\end{aligned}$$

Solution : $]-\frac{1}{2}, +\infty[$

(d) $\frac{t+4}{t-2} < 3$

$$\begin{aligned}
&\frac{t+4}{t-2} < 3 \\
&t+4 < 3(t-2) \\
&t+4 < 3t-6 \\
&4+6 < 2t \\
&10 < 2t \\
&5 < t \\
&t > 5 \text{ et } t \neq 2
\end{aligned}$$

Solution : $]5, +\infty[$

(e) $\frac{3x-1}{x+2} \geq \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}
&\frac{3x-1}{x+2} \geq \frac{2}{3} \\
&3(3x-1) \geq 2(x+2) \\
&9x-3 \geq 2x+4 \\
&9x-2x \geq 4+3 \\
&7x \geq 7 \\
&x \geq 1 \text{ et } x \neq -2
\end{aligned}$$

AUNEGe, CC – BY NC ND

Solution : $[1,+\infty[$

(f) $\frac{4y+7}{2y-1} > 2$

$$\begin{aligned} \frac{4y+7}{2y-1} &> 2 \\ 4y+7 &> 2(2y-1) \\ 4y+7 &> 4y-2 \\ 7 &> -2 \ \text{(toujours vrai, sauf pour la valeur exclue)} \\ y &\neq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Solution : $]-\infty,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},+\infty[$

(g) $\frac{5t-3}{t+5} < 1$

$$\begin{aligned} \frac{5t-3}{t+5} &< 1 \\ 5t-3 &< t+5 \\ 5t-t &< 5+3 \\ 4t &< 8 \\ t &< 2 \ \text{ et } \ t \neq -5 \end{aligned}$$

Solution : $]-\infty,-5[\cup]-5,2[$

(h) $\frac{x-2}{x+4} \leq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x+4} &\leq \frac{1}{2} \\ 2(x-2) &\leq x+4 \\ 2x-4 &\leq x+4 \\ 2x-x &\leq 4+4 \\ x &\leq 8 \ \text{ et } \ x \neq -4 \end{aligned}$$

Solution : $]-\infty,-4[\cup]-4,8]$

(i) $\frac{2u+1}{u-3} \geq \frac{5}{4}$

$$\begin{aligned} \frac{2u+1}{u-3} &\geq \frac{5}{4} \\ 4(2u+1) &\geq 5(u-3) \\ 8u+4 &\geq 5u-15 \\ 8u-5u &\geq -15-4 \\ 3u &\geq -19 \\ u &\geq -\frac{19}{3} \ \text{ et } \ u \neq 3 \end{aligned}$$

AUNEGe, CC – BY NC ND

Solution : $\left[-\frac{19}{3}, 3[\cup]3, +\infty\right[$

(j) $\frac{3y-4}{2y+5} < \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}\frac{3y-4}{2y+5} &< \frac{1}{3}\\ 3(3y-4) &< 1(2y+5)\\ 9y-12 &< 2y+5\\ 9y-2y &< 5+12\\ 7y &< 17\\ y &< \frac{17}{7} \text{ et } y \neq -\frac{5}{2}\end{aligned}$$

Solution : $]-\infty, -\frac{5}{2}[\cup]-\frac{5}{2}, \frac{17}{7}[$

(k) $\frac{t+1}{t-3} \leq \frac{4}{3}$

$$\begin{aligned}\frac{t+1}{t-3} &\leq \frac{4}{3}\\ 3(t+1) &\leq 4(t-3)\\ 3t+3 &\leq 4t-12\\ 3+12 &\leq t\\ 15 &\leq t\\ t &\geq 15 \text{ et } t \neq 3\end{aligned}$$

Solution : $[15, +\infty[$

(l) $\frac{x-5}{x+1} > \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}\frac{x-5}{x+1} &> \frac{3}{4}\\ 4(x-5) &> 3(x+1)\\ 4x-20 &> 3x+3\\ 4x-3x &> 3+20\\ x &> 23 \text{ et } x \neq -1\end{aligned}$$

Solution : $]23, +\infty[$

Systèmes d'équations linéaires

Questions

1. **Résolvez les systèmes d'équations suivants selon la méthode de la substitution :**

(a) $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 4x-y=1 \end{cases}$

AUNEGe, CC – BY NC ND

(b) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 5x + 2y = 10 \\ 7x - 3y = -1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ -2x + 4y = 8 \end{cases}$

2. Résolvez les systèmes d'équations suivants selon la méthode de l'élimination :

(a) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + 4y = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 4x + y & = & 7 \\ -3x + 2y & = & -6 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 5x - y = 2 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$

3. Résolvez les systèmes d'équations suivants selon la méthode d'égalisation :

(a) $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 4x - 5y = -2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ -2x + 4y = -6 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 5x + 4y = 1 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 6x - 3y = 9 \\ -4x + y = -11 \end{cases}$

Réponses

1. (a) $\begin{Bmatrix} 2x + 3y = 7 \\ 4x - y = 1 \end{Bmatrix}$

$$4x - y = 1$$

Substituons (1) dans la première équation :

AUNEGe, CC – BY NC ND

$$\begin{aligned}2x + 3(4x - 1) &= 7\\ 2x + 12x - 3 &= 7\\ 14x - 3 &= 7\\ 14x &= 10\\ x &= \frac{10}{14}\\ x &= \frac{5}{7}\end{aligned}$$

Substituons $x = \frac{5}{7}$ dans (1) :

$$\begin{aligned}y &= 4\left(\frac{5}{7}\right) - 1\\ y &= \frac{20}{7} - 1\\ y &= \frac{20}{7} - \frac{7}{7}\\ y &= \frac{13}{7}\end{aligned}$$

La solution est donc $x = \frac{5}{7}$ et $y = \frac{13}{7}$.

(b) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

Solution :

$$x - 2y = 4$$

Substituons (2) dans la deuxième équation :

$$\begin{aligned}3(2y + 4) + y &= 5\\ 6y + 12 + y &= 5\\ 7y + 12 &= 5\\ 7y &= -7\\ y &= -1\end{aligned}$$

Substituons $y = -1$ dans (2) :

$$\begin{aligned}x &= 2(-1) + 4\\ x &= -2 + 4\\ x &= 2\end{aligned}$$

La solution est donc $x = 2$ et $y = -1$.

(c) $\begin{cases} 5x + 2y = 10 \\ 7x - 3y = -1 \end{cases}$

AUNEGe, CC – BY NC ND

Solution :

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 10 \\ 2y &= 10 - 5x \end{aligned}$$

Substituons (3) dans la deuxième équation :

$$\begin{aligned} 7x - 3\left(\frac{10 - 5x}{2}\right) &= -1 \\ 7x - \frac{30 - 15x}{2} &= -1 \\ 14x - (30 - 15x) &= -2 \\ 14x - 30 + 15x &= -2 \\ 29x - 30 &= -2 \\ 29x &= 28 \\ x &= \frac{28}{29} \end{aligned}$$

Substituons $x = \frac{28}{29}$ dans (3) :

$$\begin{aligned} y &= \frac{10 - 5\left(\frac{28}{29}\right)}{2} \\ y &= \frac{10 - \frac{140}{29}}{2} \\ y &= \frac{290 - 140}{58} \\ y &= \frac{150}{58} \\ y &= \frac{75}{29} \end{aligned}$$

La solution est donc $x = \frac{28}{29}$ et $y = \frac{75}{29}$.

(d) $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ -2x + 4y = 8 \end{cases}$

Solution :

$$3x + y = 6$$

Substituons (4) dans la deuxième équation :

AUNEGe, CC – BY NC ND

$$
\begin{aligned}
-2x + 4(6 - 3x) &= 8 \\
-2x + 24 - 12x &= 8 \\
-2x - 12x &= 8 - 24 \\
-14x &= -16 \\
x &= \frac{16}{14} \\
x &= \frac{8}{7}
\end{aligned}
$$

Substituons $x = \frac{8}{7}$ dans (4) :

$$
\begin{aligned}
y &= 6 - 3\left(\frac{8}{7}\right) \\
y &= 6 - \frac{24}{7} \\
y &= \frac{42}{7} - \frac{24}{7} \\
y &= \frac{18}{7}
\end{aligned}
$$

La solution est donc $x = \frac{8}{7}$ et $y = \frac{18}{7}$.

2. (a) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + 4y = 1 \end{cases}$

Solution :

Multiplions la deuxième équation par 3 :

$$
\begin{aligned}
3(x + 4y) &= 3(1) \\
3x + 12y &= 3
\end{aligned}
$$

Soustrayons la première équation de cette nouvelle équation :

$$
\begin{aligned}
(3x + 12y) - (3x - 2y) &= 3 - 4 \\
3x + 12y - 3x + 2y &= -1 \\
14y &= -1 \\
y &= -\frac{1}{14}
\end{aligned}
$$

Substituons $y = -\frac{1}{14}$ dans la deuxième équation :

AUNEGe, CC – BY NC ND

$$x + 4\left(-\frac{1}{14}\right) = 1$$
$$x - \frac{4}{14} = 1$$
$$x - \frac{2}{7} = 1$$
$$x = 1 + \frac{2}{7}$$
$$x = \frac{7}{7} + \frac{2}{7}$$
$$x = \frac{9}{7}$$

La solution est donc $x = \frac{9}{7}$ et $y = -\frac{1}{14}$.

(b) $\begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$

Solution :

Multiplions la deuxième équation par 2 :

$$2(-x + 3y) = 2(2)$$
$$-2x + 6y = 4$$

Ajoutons la première équation à cette nouvelle équation :

$$(2x + 5y) + (-2x + 6y) = 11 + 4$$
$$2x + 5y - 2x + 6y = 15$$
$$11y = 15$$
$$y = \frac{15}{11}$$

Substituons $y = \frac{15}{11}$ dans la deuxième équation :

$$-x + 3\left(\frac{15}{11}\right) = 2$$
$$-x + \frac{45}{11} = 2$$
$$-x = 2 - \frac{45}{11}$$
$$-x = \frac{22}{11} - \frac{45}{11}$$
$$-x = -\frac{23}{11}$$
$$x = \frac{23}{11}$$

AUNEGe, CC – BY NC ND

La solution est donc $x = \frac{23}{11}$ et $y = \frac{15}{11}$.

(c) $\begin{cases} 4x + y = 7 \\ -3x + 2y = -6 \end{cases}$

Solution :

Multiplions la première équation par (-2) :

$$\begin{aligned} (-2)(4x + y) &= (-2)(7) \\ -8x - 2y &= -14 \end{aligned}$$

Ajoutons la deuxième équation à cette nouvelle équation :

$$\begin{aligned} (-8x - 2y) + (-3x + 2y) &= -14 - 6 \\ -8x - 2y - 3x + 2y &= -20 \\ -11x &= -20 \\ x &= \frac{20}{11} \end{aligned}$$

Remplaçons $x = \frac{20}{11}$ dans $y = 7 - 4x$:

$$\begin{aligned} y &= 7 - 4\left(\frac{20}{11}\right) \\ y &= \frac{77 - 80}{11} \\ y &= \frac{-3}{11} \end{aligned}$$

La solution est donc $x = \frac{20}{11}$ et $y = \frac{-3}{11}$.

(d) $\begin{cases} 5x - y = 2 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$

Solution :

Multiplions la première équation par 2 :

$$\begin{aligned} 2(5x - y) &= 2(2) \\ 10x - 2y &= 4 \end{aligned}$$

Ajoutons la deuxième équation à cette nouvelle équation :

$$\begin{aligned} (10x - 2y) + (3x + 2y) &= 4 + 8 \\ 10x - 2y + 3x + 2y &= 12 \\ 13x &= 12 \\ x &= \frac{12}{13} \end{aligned}$$

Substituons $x = \frac{12}{13}$ dans la première équation :

$$
\begin{aligned}
5\left(\frac{12}{13}\right) - y &= 2 \\
\frac{60}{13} - y &= 2 \\
-y &= 2 - \frac{60}{13} \\
-y &= \frac{26}{13} - \frac{60}{13} \\
-y &= -\frac{34}{13} \\
y &= \frac{34}{13}
\end{aligned}
$$

La solution est donc $x = \frac{12}{13}$ et $y = \frac{34}{13}$.

3. (a) $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 4x - 5y = -2 \end{cases}$

Solution :

Résolvons la première équation pour x :

$$
\begin{aligned}
2x + 3y &= 12 \\
2x &= 12 - 3y
\end{aligned}
$$

Résolvons la deuxième équation pour x :

$$
\begin{aligned}
4x - 5y &= -2 \\
4x &= 5y - 2
\end{aligned}
$$

Égalisons (1) et (2) :

$$
\begin{aligned}
6 - \frac{3y}{2} &= \frac{5y - 2}{4} \\
24 - 6y &= 5y - 2 \\
24 + 2 &= 5y + 6y \\
26 &= 11y \\
y &= \frac{26}{11}
\end{aligned}
$$

Substituons $y = \frac{26}{11}$ dans (1):

AUNEGe, CC – BY NC ND

$$\begin{aligned}
x &= 6 - \frac{3\left(\frac{26}{11}\right)}{2} \\
x &= 6 - \frac{3 \times 26}{2 \times 11} \\
x &= 6 - \frac{78}{22} \\
x &= 6 - \frac{39}{11} \\
x &= \frac{66}{11} - \frac{39}{11} \\
x &= \frac{27}{11}
\end{aligned}$$

La solution est donc $x = \frac{27}{11}$ et $y = \frac{26}{11}$.

(b) Résolvez le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 3x - y & = & 7 \\ -2x + 4y & = & -6 \end{cases}$$

Solution :

Résolvons la première équation pour y :

$$\begin{aligned}
3x - y &= 7 \\
-y &= 7 - 3x
\end{aligned}$$

Résolvons la deuxième équation pour y :

$$\begin{aligned}
-2x + 4y &= -6 \\
4y &= 2x - 6 \\
y &= \frac{2x - 6}{4}
\end{aligned}$$

Égalisons (3) et (4) :

$$\begin{aligned}
3x - 7 &= \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \\
6x - 14 &= x - 3 \\
6x - x &= -3 + 14 \\
5x &= 11 \\
x &= \frac{11}{5}
\end{aligned}$$

Substituons $x = \frac{11}{5}$ dans (3) :

AUNEGe, CC – BY NC ND

$$y = 3\left(\frac{11}{5}\right) - 7$$
$$y = \frac{33}{5} - 7$$
$$y = \frac{33}{5} - \frac{35}{5}$$
$$y = -\frac{2}{5}$$

La solution est donc $x = \frac{11}{5}$ et $y = -\frac{2}{5}$.

(c) Résolvez le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 5x + 4y = 1 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

Solution :

Résolvons la première équation pour x :

$$5x + 4y = 1$$
$$5x = 1 - 4y$$

Résolvons la deuxième équation pour x :

$$3x - 2y = 4$$
$$3x = 4 + 2y$$

Égalisons (5) et (6) :

$$\frac{1 - 4y}{5} = \frac{4 + 2y}{3}$$
$$3(1 - 4y) = 5(4 + 2y)$$
$$3 - 12y = 20 + 10y$$
$$-12y - 10y = 20 - 3$$
$$-22y = 17$$
$$y = -\frac{17}{22}$$

Substituons $y = -\frac{17}{22}$ dans (5) :

AUNEGe, CC – BY NC ND

$$x = \frac{1 - 4\left(-\frac{17}{22}\right)}{5}$$
$$x = \frac{1 + \frac{68}{22}}{5}$$
$$x = \frac{1 + \frac{34}{11}}{5}$$
$$x = \frac{\frac{11}{11} + \frac{34}{11}}{5}$$
$$x = \frac{\frac{45}{11}}{5}$$
$$x = \frac{45}{55}$$
$$x = \frac{9}{11}$$

La solution est donc $x = \frac{9}{11}$ et $y = -\frac{17}{22}$.

(d) Résolvez le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 6x - 3y & = 9 \\ -4x + y & = -11 \end{cases}$$

Solution :

Résolvons la première équation pour y :

$$\begin{aligned} 6x - 3y &= 9 \\ -3y &= 9 - 6x \end{aligned}$$

Résolvons la deuxième équation pour y :

$$-4x + y = -11$$

Égalisons (7) et (8) :

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 4x - 11 \\ 2x - 4x &= -11 + 3 \\ -2x &= -8 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Substituons $x = 4$ dans (7) :

$$\begin{aligned} y &= 2(4) - 3 \\ y &= 8 - 3 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

La solution est donc $x = 4$ et $y = 5$.

Généralités

Les fonctions

Questions

1. **Soit $f(x) = 3x + 2$**

(a) Déterminez le domaine de définition de f.

(b) Trouvez les antécédents de 5 et 8.

2. **Soit $g(x) = \frac{2x-1}{x+3}$**

(a) Déterminez le domaine de définition de g.

(b) Trouvez les antécédents de 1 et -2.

3. **Soit $h(x) = \sqrt{x-4}$**

(a) Déterminez le domaine de définition de h.

(b) Trouvez les antécédents de 2 et 3.

4. **Soit $j(x) = \ln(x-1)$**

(a) Déterminez le domaine de définition de j.

(b) Trouvez les antécédents de 0 et 1.

5. **Soit $k(x) = e^x$**

(a) Déterminez le domaine de définition de k.

(b) Trouvez les antécédents de 1 et e.

6. **Soit $m(x) = 2x^2 - 3x + 1$**

(a) Déterminez le domaine de définition de m.

AUNEGe, CC – BY NC ND

(b) Trouvez les antécédents de 0 et 5.

7. Soit $n(x) = \frac{1}{x^2-4}$

(a) Déterminez le domaine de définition de n.

(b) Trouvez les antécédents de 1 et 0.

8. Soit $p(x) = 3e^x - 1$

(a) Déterminez le domaine de définition de p.

(b) Trouvez les antécédents de 0 et 2.

9. Soit $q(x) = \sqrt{4 - x}$

(a) Déterminez le domaine de définition de q.

(b) Trouvez les antécédents de 1 et 0.

10. Soit $r(x) = \ln(2x + 3)$

(a) Déterminez le domaine de définition de r.

(b) Trouvez les antécédents de 0 et 1.

Réponses

1. Soit $f(x) = 3x + 2$

(a) Domaine de définition de f: $\mathbb{R}$

(b) Antécédents de 5 et 8 :

$$\begin{aligned} 3x + 2 &= 5 \\ 3x &= 3 \\ x &= 1 \\ 3x + 2 &= 8 \\ 3x &= 6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

2. Soit $g(x) = \frac{2x-1}{x+3}$

(a) Domaine de définition de g: $x \neq -3$

(b) Antécédents de 1 et -2 :

AUNEGe, CC – BY NC ND

$$\frac{2x-1}{x+3} = 1$$
$$2x - 1 = x + 3$$
$$x = 4$$

$$\frac{2x-1}{x+3} = -2$$
$$2x - 1 = -2(x+3)$$
$$2x - 1 = -2x - 6$$
$$4x = -5$$
$$x = -\frac{5}{4}$$

3. Soit $h(x) = \sqrt{x-4}$

(a) Domaine de définition de $h: x \geq 4$

(b) Antécédents de 2 et 3 :

$$\sqrt{x-4} = 2$$
$$x - 4 = 4$$
$$x = 8$$
$$\sqrt{x-4} = 3$$
$$x - 4 = 9$$
$$x = 13$$

4. Soit $j(x) = \ln(x-1)$

(a) Domaine de définition de $j: x > 1$

(b) Antécédents de 0 et 1 :

$$\ln(x-1) = 0$$
$$x - 1 = 1$$
$$x = 2$$
$$\ln(x-1) = 1$$
$$x - 1 = e$$
$$x = e + 1$$

5. Soit $k(x) = e^x$

(a) Domaine de définition de $k: \mathbb{R}$

(b) Antécédents de 1 et e :

$$e^x = 1$$
$$x = 0$$
$$e^x = e$$
$$x = 1$$

AUNEGe, CC – BY NC ND

6. **Soit $m(x) = 2x^2 - 3x + 1$**

(a) Domaine de définition de m: $\mathbb{R}$

(b) Antécédents de 0 et 5 :

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$
$$x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$
$$2x^2 - 3x + 1 = 5$$
$$2x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$x = 2 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

7. **Soit $n(x) = \frac{1}{x^2-4}$**

(a) Domaine de définition de n: $x \neq 2$ et $x \neq -2$

(b) Antécédents de 1 et 0 :

$$\frac{1}{x^2-4} = 1$$
$$x^2 - 4 = 1$$
$$x^2 = 5$$
$$x = \pm\sqrt{5}$$

$\frac{1}{x^2-4} = 0$ (impossible, car le dénominateur ne peut être 0)

8. **Soit $p(x) = 3e^x - 1$**

(a) Domaine de définition de p: $\mathbb{R}$

(b) Antécédents de 0 et 2 :

$$3e^x - 1 = 0$$
$$3e^x = 1$$
$$e^x = \frac{1}{3}$$
$$x = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$3e^x - 1 = 2$$
$$3e^x = 3$$
$$e^x = 1$$
$$x = 0$$

9. **Soit $q(x) = \sqrt{4 - x}$**

(a) Domaine de définition de q: $x \leq 4$

AUNEGe, CC – BY NC ND

(b) Antécédents de 1 et 0 :

$$\begin{aligned}\sqrt{4-x} &= 1\\ 4-x &= 1\\ x &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{4-x} &= 0\\ 4-x &= 0\\ x &= 4\end{aligned}$$

10. Soit $r(x) = \ln(2x+3)$

(a) Domaine de définition de r: $2x+3>0 \Rightarrow x > -\frac{3}{2}$

(b) Antécédents de 0 et 1 :

$$\begin{aligned}\ln(2x+3) &= 0\\ 2x+3 &= 1\\ 2x &= -2\\ x &= -1\\ \ln(2x+3) &= 1\\ 2x+3 &= e\\ 2x &= e-3\\ x &= \frac{e-3}{2}\end{aligned}$$

Taux de variation et pourcentage

Questions

1. Un produit coûte 50 euros. Son prix augmente de 20%. Quel est le nouveau prix ?

(a) Calculez le taux de variation.

(b) Calculez le coefficient multiplicateur.

(c) Calculez le nouveau prix.

2. Le prix d'un article passe de 80 euros à 64 euros. Quelle est la variation en pourcentage ?

(a) Calculez le taux de variation.

(b) Calculez le coefficient multiplicateur.

3. **Un investissement de 1000 euros génère un rendement de 5% par an pendant 3 ans. Quel est le montant final de l'investissement ?**

(a) Calculez le taux de variation annuel.

(b) Calculez le coefficient multiplicateur annuel.

(c) Calculez le montant final de l'investissement.

4. **Une population passe de 5000 habitants à 6000 habitants en 4 ans. Quel est le taux de variation annuel moyen ?**

(a) Calculez le taux de variation global.

(b) Calculez le taux de variation annuel moyen.

5. **Une entreprise voit son chiffre d'affaires augmenter de 10% la première année, puis de 15% la deuxième année. Quelle est la variation totale sur les deux années ?**

(a) Calculez le taux de variation global.

(b) Calculez le coefficient multiplicateur global.

6. **Le prix d'un produit est réduit de 30%, puis augmenté de 20%. Quelle est la variation totale du prix ?**

(a) Calculez le taux de variation global.

(b) Calculez le coefficient multiplicateur global.

7. **Une machine coûte initialement 1200 euros. Son prix diminue de 25% la première année, puis de 10% la deuxième année. Quel est le prix final de la machine ?**

(a) Calculez le taux de variation global.

(b) Calculez le coefficient multiplicateur global.

(c) Calculez le prix final de la machine.

8. **Une action boursière augmente de 5% un mois, puis diminue de 2% le mois suivant, et augmente de 3% le mois suivant. Quelle est la variation totale sur ces trois mois ?**

(a) Calculez le taux de variation global.

(b) Calculez le coefficient multiplicateur global.

9. **Le prix d'un abonnement passe de 100 euros à 120 euros en 5 ans. Quel est le taux de variation annuel moyen ?**

(a) Calculez le taux de variation global.

(b) Calculez le taux de variation annuel moyen.

10. **Un capital de 5000 euros augmente de 8% par an pendant 4 ans. Quel est le montant final du capital ?**

(a) Calculez le taux de variation annuel.

(b) Calculez le coefficient multiplicateur annuel.

(c) Calculez le montant final du capital.

Réponses

1. **Un produit coûte 50 euros. Son prix augmente de 20%. Quel est le nouveau prix ?**

(a) Taux de variation : 0,2

(b) Coefficient multiplicateur : $1+\frac{20}{100}=1{,}2$

(c) Nouveau prix :

$$50\times 1{,}2=60 \text{ euros}$$

2. **Le prix d'un article passe de 80 euros à 64 euros. Quelle est la variation en pourcentage ?**

   (a) Taux de variation :

$$\frac{64-80}{80}\times 100=-0{,}2$$

(b) Coefficient multiplicateur :

$$1+\frac{-20}{100}=0{,}8$$

Le prix varie donc de -20%.

3. **Un investissement de 1000 euros génère un rendement de 5% par an pendant 3 ans. Quel est le montant final de l'investissement ?**

(a) Taux de variation annuel : 0,05

(b) Coefficient multiplicateur annuel : $1+\frac{5}{100}=1{,}05$

(c) Montant final de l'investissement :

$$1000\times(1{,}05)^3=1000\times1{,}157625=1157{,}63 \text{ euros}$$

4. **Une population passe de 5000 habitants à 6000 habitants en 4 ans. Quel est le taux de variation annuel moyen ?**

(a) Taux de variation global :

$$\frac{6000-5000}{5000}=0{,}2$$

(b) Taux de variation annuel moyen :

$$(1+0{,}2)^{\frac{1}{4}}-1=1,2^{\frac{1}{4}}-1\approx0{,}0472$$
$$\approx4{,}72\%$$

5. **Une entreprise voit son chiffre d'affaires augmenter de 10% la première année, puis de 15% la deuxième année. Quelle est la variation totale sur les deux années ?**

(a) Coefficient multiplicateur global :

$$1{,}1\times1{,}15=1{,}265$$

(b) Taux de variation global :

$$(1{,}265-1)\times100=26{,}5\%$$

6. **Le prix d'un produit est réduit de 30%, puis augmenté de 20%. Quelle est la variation totale du prix ?**

(a) Coefficient multiplicateur global :

$$0{,}7\times1{,}2=0{,}84$$

(b) Taux de variation global :

$$(0{,}84 - 1) \times 100 = -16\%$$

7. **Une machine coûte initialement 1200 euros. Son prix diminue de 25% la première année, puis de 10% la deuxième année. Quel est le prix final de la machine ?**

(a) Coefficient multiplicateur global :

$$0{,}75 \times 0{,}9 = 0{,}675$$

(b) Taux de variation global :

$$(0{,}675 - 1) \times 100 = -32{,}5\%$$

(c) Prix final :

$$1200 \times 0{,}675 = 810 \text{ euros}$$

8. **Une action boursière augmente de 5% un mois, puis diminue de 2% le mois suivant, et augmente de 3% le mois suivant. Quelle est la variation totale sur ces trois mois ?**

(a) Coefficient multiplicateur global :

$$1{,}05 \times 0{,}98 \times 1{,}03 = 1{,}05927$$

(b) Taux de variation global :

$$(1{,}05927 - 1) \times 100 = 5{,}927\%$$

9. **Le prix d'un abonnement passe de 100 euros à 120 euros en 5 ans. Quel est le taux de variation annuel moyen ?**

(a) Taux de variation global :

$$\frac{120 - 100}{100} \times 100 = 0{,}2$$

(b) Taux de variation annuel moyen :

$$(1 + 0{,}2)^{\frac{1}{5}} - 1 = 1{,}2^{\frac{1}{5}} - 1 \approx 0{,}0371 \approx 3{,}71\%$$

10. **Un capital de 5000 euros augmente de 8% par an pendant 4 ans. Quel est le montant final du capital ?**

AUNEGe, CC – BY NC ND

(a) Taux de variation annuel : 0,08

(b) Coefficient multiplicateur annuel : $1 + \frac{8}{100} = 1{,}08$

(c) Montant final du capital :

$$\begin{aligned} 5000 \times (1{,}08)^4 &= 5000 \times 1{,}36049 \\ &= 6802{,}45 \text{ euros} \end{aligned}$$

Élasticité

Note

Pour faciliter les calculs, nous exprimons les élasticités-prix de la demande avec le signe attendu, c'est-à-dire avec un signe négatif. Considérer sa valeur absolue est utile pour l'interprétation.

Questions

1. **Une entreprise vend un produit à 40 euros l'unité et en vend 600 unités par mois. Suite à une augmentation du prix à 50 euros, l'élasticité prix de la demande est estimée à $-1,5$.**

(a) Calculez la variation en pourcentage de la quantité demandée.

(b) Déterminez la nouvelle quantité demandée.

(c) Calculez l'évolution des recettes de l'entreprise.

2. **Le prix d'un bien passe de 20 euros à 22 euros, et l'élasticité prix de la demande est de $-0,8$.**

(a) Calculez la variation en pourcentage de la quantité demandée.

(b) Déterminez la nouvelle quantité demandée si la quantité initiale était de 150 unités.

(c) Discutez de l'impact sur les recettes de l'entreprise.

3. **Une entreprise envisage de réduire le prix d'un de ses produits de 30 euros à 25 euros. La quantité demandée actuelle est de 400 unités et l'élasticité prix de la demande est de -2.**

(a) Calculez la variation en pourcentage de la quantité demandée.

AUNEGe, CC – BY NC ND

(b) Déterminez la nouvelle quantité demandée.

(c) Évaluez l'impact sur les recettes de l'entreprise

4. **Le prix d'un produit est réduit de 50 euros à 45 euros, et les ventes augmentent de 500 à 550 unités.**

(a) Calculez l'élasticité prix de la demande entre ces deux prix.

(b) Si l'entreprise veut augmenter ses recettes, devrait-elle continuer à baisser le prix ou non ? Justifiez votre réponse.

Réponses

1. **Une entreprise vend un produit à 40 euros l'unité et en vend 600 unités par mois. Suite à une augmentation du prix à 50 euros, l'élasticité prix de la demande est estimée à -1,5.**

(a) Variation en pourcentage de la quantité demandée :

$$\begin{aligned}
\text{Élasticité prix de la demande } &= \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P} \\
-1{,}5 &= \frac{\Delta Q/600}{10/40} \\
-1{,}5 &= \frac{\Delta Q/600}{0{,}25} \\
\Delta Q/600 &= -1{,}5 \times 0{,}25 \\
\Delta Q/600 &= -0{,}375
\end{aligned}$$

La demande diminue donc de 37,5%.

(b) Nouvelle quantité demandée :

$$\begin{aligned}
Q_{\text{nouveau}} &= 600 \times (1 - 0{,}375) \\
Q_{\text{nouveau}} &= 375
\end{aligned}$$

(c) Évolution des recettes de l'entreprise :

$$\begin{aligned}
R_{\text{initial}} &= 40 \times 600 = 24000 \text{ euros} \\
R_{\text{nouveau}} &= 50 \times 375 = 18750 \text{ euros} \\
\Delta R &= 18750 - 24000 = -5250 \text{ euros}
\end{aligned}$$

2. **Le prix d'un bien passe de 20 euros à 22 euros, et l'élasticité prix de la demande est de $\mathbf{-0,8}$.**

AUNEGe, CC – BY NC ND

(a) Variation en pourcentage de la quantité demandée :

$$\text{Élasticité prix de la demande } = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P}$$
$$-0{,}8 = \frac{\Delta Q/Q}{2/20}$$
$$-0{,}8 = \frac{\Delta Q/Q}{0{,}1}$$
$$\Delta Q/Q = -0{,}8 \times 0{,}1$$
$$\Delta Q/Q = -0{,}08$$

La demande recule de 8%.

(b) Nouvelle quantité demandée :

$$Q_{\text{nouveau}} = 150 \times (1 - 0{,}08)$$
$$Q_{\text{nouveau}} = 138$$

(c) Impact sur les recettes de l'entreprise :

$$R_{\text{initial}} = 20 \times 150 = 3000 \text{ euros}$$
$$R_{\text{nouveau}} = 22 \times 138 = 3036 \text{ euros}$$
$$\Delta R = 3036 - 3000 = 36 \text{ euros}$$

3. **Une entreprise envisage de réduire le prix d'un de ses produits de 30 euros à 25 euros. La quantité demandée actuelle est de 400 unités et l'élasticité prix de la demande est de -2.**

   (a) Variation en pourcentage de la quantité demandée :

$$\text{Élasticité prix de la demande } = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P}$$
$$-2 = \frac{\Delta Q/400}{-5/30}$$
$$-2 = \frac{\Delta Q/400}{-\frac{1}{6}}$$
$$\Delta Q/400 = -2 \times -\frac{1}{6}$$
$$\Delta Q/400 = \frac{1}{3}$$

La demande augmente d'environ 33%.

(b) Nouvelle quantité demandée :

$$Q_{\text{nouveau}} = 400 \times 1{,}33$$
$$Q_{\text{nouveau}} = 533$$

AUNEGe, CC – BY NC ND

(c) Impact sur les recettes de l'entreprise :

$$\begin{aligned} R_{\text{initial}} &= 30 \times 400 = 12000 \text{ euros} \\ R_{\text{nouveau}} &= 25 \times 533 = 13325 \text{ euros} \\ \Delta R &= 13325 - 12000 = 1325 \text{ euros} \end{aligned}$$

4. **Le prix d'un produit est réduit de 50 euros à 45 euros, et les ventes augmentent de 500 à 550 unités.**

(a) Élasticité prix de la demande :

$$\begin{aligned} \text{Élasticité prix de la demande } &= \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P} \\ &= \frac{550-500}{500} \div \frac{45-50}{50} \\ &= \frac{50}{500} \div \frac{-5}{50} \\ &= 0{,}1 \div -0{,}1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

(b) Stratégie de tarification :

Élasticité de -1 signifie que la demande est unitaire. L'entreprise ne bénéficiera pas d'une augmentation de recette en baissant ou augmentant le prix. Elle devrait chercher à améliorer d'autres aspects comme la qualité ou la publicité pour influencer la demande.

AUNEGe, CC – BY NC ND

Références

Comment citer ce cours ?

Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion, Jean-François Caulier, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

Cette œuvre est mise à disposition dans le respect de la législation française protégeant le droit d'auteur, selon les termes du contrat de licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/). En cas de conflit entre la législation française et les termes de ce contrat de licence, la clause non conforme à la législation française est réputée non écrite. Si la clause constitue un élément déterminant de l'engagement des parties ou de l'une d'elles, sa nullité emporte celle du contrat de licence tout entier.