Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion

Généralités sur les fonctions usuelles – Taux de variation et pourcentage

Ce cours vous est proposé par Jean-François Caulier, Maître de conférences, Université Paris 1 Panthéon Sorbonne et par AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Table des matières

Préambule

Objectifs :

- Savoir passer d'une variation absolue à une variation relative,
- Comprendre comment manipuler des variations successives,
- Savoir calculer un taux moyen.

Introduction

Lorsqu'on étudie les variations de phénomènes économiques, financiers ou démographiques, il est souvent plus pertinent d'exprimer les changements en termes relatifs (ou en pourcentages) plutôt qu'en termes absolus. Cela permet de mieux saisir la dynamique des phénomènes, indépendamment de leur valeur initiale et de l'unité de mesure choisie.

Par exemple, une augmentation de 50 unités de population dans un petit village n'a pas la même signification qu'une augmentation de 50 unités dans une grande ville. En exprimant cette augmentation en pourcentage, on peut comparer les variations de manière plus équitable et comprendre les impacts relatifs sur chaque population.

Le coefficient multiplicateur est un outil essentiel pour calculer une variation relative sur une succession de plusieurs périodes. Ce coefficient permet de relier directement une valeur initiale à une valeur finale, en tenant compte des variations successives.

Par exemple, si une population croît de 2% chaque année, le coefficient multiplicateur après trois ans ne sera pas simplement 6%, mais devra tenir compte de l'effet composé de cette croissance annuelle. Le coefficient multiplicateur nous aide à comprendre et à calculer cette croissance composée.

Pour calculer le taux moyen correspondant à plusieurs taux successifs, il est indispensable d'utiliser les coefficients multiplicateurs. Cette méthode permet de déterminer un taux de variation moyen qui, appliqué sur la période totale, aboutirait au même résultat que les variations successives.

Par exemple, si un investissement croît de 10% la première année, puis de 20% la deuxième année, il n'aura pas évolué de 30% sur les deux ans (ni de 15% en moyenne chaque année), il est possible de calculer le taux moyen annuel qui aboutirait au même résultat global sur les trois ans grâce au coefficient multiplicateur.

Ce chapitre abordera donc en détail ces notions, en fournissant des exemples concrets pour bien comprendre comment utiliser les taux de variation et les pourcentages dans divers contextes.

Taux de variation et pourcentage

Le **taux de variation** mesure l'évolution d'une mesure entre une période 0 et une période 1, de la valeur initiale (V_0) à la valeur finale (V_1). Il permet d'évaluer comment une grandeur change au fil du temps, que ce soit une augmentation ou une diminution.

La formule pour calculer le taux de variation est :

$$T_{1/0} = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

Cette formule exprime la différence entre la valeur finale (V_1) et la valeur initiale (V_0), rapportée à la valeur initiale (V_0). Ce rapport est une mesure relative qui nous indique la proportion de changement par rapport à la valeur initiale.

Pour exprimer le taux de variation en **pourcentage**, on multiplie le résultat par 100 :

$$t_{1/0} = T_{1/0} \times 100\%$$

Ainsi, le taux de variation en pourcentage ($t_{1/0}$) nous donne une idée plus intuitive, sans unité de mesure, de l'ampleur du changement.

Prenons un exemple pour mieux comprendre :

Si $(V_0 = 100)$ et $(V_1 = 120)$, le taux de variation $T_{1/0}$ est calculé comme suit :

$$T_{1/0} = \frac{120 - 100}{100} = 0{,}2$$

Exprimé en pourcentage, cela donne :

$$t_{1/0} = 0{,}2 \times 100\% = 20\%$$

Cela signifie qu'il y a eu une augmentation de 20%.

Interprétation des résultats :

- Si ($t > 0$), il s'agit d'un pourcentage d'augmentation et t est le taux de croissance,
- Si ($t < 0$), il s'agit d'un pourcentage de diminution et t est le taux de décroissance.

Exemple pratique : Taux de variation d'une entreprise

Supposons qu'une entreprise ait un chiffre d'affaires de $200\ 000$€ en 2023 et de $250\ 000$€ en 2024. Quel est son taux de croissance ?

Réponse :

1. $V_0 = 200\ 000$
2. $V_1 = 250\ 000$

Le taux de variation est :

$$T_{1/0} = \frac{250\ 000 - 200\ 000}{200\ 000} = 0{,}25$$

Exprimé en pourcentage :

$$t_{1/0} = 0{,}25 \times 100\% = 25\%$$

Il y a donc une croissance de 25% du chiffre d'affaires de l'entreprise entre 2023 et 2024.

Le coefficient multiplicateur

Le coefficient multiplicateur, noté m, est la valeur qui, multipliée par la valeur initiale V_0, permet d'obtenir la valeur finale V_1. Cette relation s'exprime par la formule suivante :

$$m \times V_0 = V_1$$

D'où, pour trouver le coefficient multiplicateur, on utilise :

$$m = \frac{V_1}{V_0}$$

Relation avec le Taux de Variation

Le taux de variation $T_{1/0}$ entre une valeur initiale V_0 et une valeur finale V_1 est défini par :

$$T_{1/0} = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

En réécrivant cette expression, on obtient :

$$T_{1/0} = \frac{V_1}{V_0} - \frac{V_0}{V_0} = m - 1$$

Ce qui permet d'obtenir le coefficient multiplicateur en fonction du taux de variation :

$$m = T_{1/0} + 1$$

Prenons un exemple pour illustrer cette relation. Si le taux de variation T est de $0{,}2$ (soit 20%), le coefficient multiplicateur correspondant est :

$$m = 1 + 0{,}2 = 1{,}2$$

Cela signifie qu'une valeur initiale sera multipliée par 1,2 pour obtenir la nouvelle valeur.

Application Pratique : croissance démographique

Supposons qu'une population augmente de 30%. Le taux de variation T est donc de $0{,}3$. Le coefficient multiplicateur correspondant sera :

$$m = 1 + 0{,}3 = 1{,}3$$

Si la population initiale est de 10 000 habitants, la nouvelle population sera de $10\,000 \times 1{,}3 = 13\,000$ habitants.

Le concept de coefficient multiplicateur n'est pas limité à la croissance démographique. Il peut également être utilisé en économie pour calculer des augmentations de prix, des variations de revenus, ou encore des modifications de coûts. Par exemple, si le prix d'un produit augmente de 15%, le coefficient multiplicateur sera :

$$m = 1 + 0{,}15 = 1{,}15$$

Si le prix initial était de $50€$, le nouveau prix sera :

$$50 \times 1{,}15 = 57{,}50€.$$

Taux successifs

Lorsqu'on applique plusieurs taux de variation de manière successive, on calcule le taux de variation global en multipliant les coefficients multiplicateurs correspondants. Cette méthode permet de déterminer l'impact total de plusieurs variations successives sur une valeur initiale. Par exemple, si on applique une réduction de 20% sur un article soldé à 30%, est-ce que cela revient à appliquer une réduction de 50% ? La réponse est non, et c'est ce que nous allons examiner maintenant.

Calcul du Coefficient Multiplicateur Global

Pour deux taux de variation T_1 et T_2, le coefficient multiplicateur global est donné par :

$$(1 + T_1) \times (1 + T_2)$$

Considérons une hausse de 10% suivie d'une baisse de 20%. Pour calculer le taux de variation global :

1. Coefficient multiplicateur de la hausse : $1 + 0{,}1 = 1{,}1$
2. Coefficient multiplicateur de la baisse : $1 - 0{,}2 = 0{,}8$
3. Coefficient multiplicateur global : $1{,}1 \times 0{,}8 = 0{,}88$
4. Taux de variation global : $0{,}88 - 1 = -0{,}12$ ou -12%

Cela signifie qu'une augmentation de 10% suivie d'une diminution de 20% aboutit à une diminution totale de 12%.

Comparaison des Pourcentages Successifs

Lorsque l'on compare les pourcentages correspondant à deux périodes successives, la différence absolue entre ces pourcentages s'exprime en termes de **points de pourcentage**.

Exemple : Si en 2024, l'inflation est de 7% et qu'en 2025, l'inflation est de 10%, l'évolution observée est de 3 points de pourcentage.

Calcul du Taux Moyen sur une Période

Pour calculer le taux moyen sur une période en utilisant les coefficients multiplicateurs, on utilise la formule suivante :

Exemple : Si $t_0, t_1, \dots, t_9$ sont les taux d'inflation observés aux périodes $0,1, \dots, 9$ et $m_0, m_1, \dots, m_9$ sont les coefficients multiplicateurs associés, alors le taux d'inflation moyen sur la période s'élève à :

$$\bar{t} = \left((m_0 \times m_1 \times \cdots \times m_9) - 1\right) \times 100\%$$

Non-compensation des hausses et baisses de même taux

Il est crucial de noter qu'une hausse et une baisse d'un même taux de pourcentage ne se compensent pas.

Exemple : Considérons un article à $100€$ auquel on applique une réduction de 10%. Sa valeur devient alors $90€$. Si on applique ensuite une hausse de 10%, la nouvelle valeur sera :

$$90 \times 1{,}1 = 99$$

Cela montre que la valeur finale (99 €) n'est pas égale à la valeur initiale (100 €), illustrant ainsi que les hausses et les baisses de même taux ne s'annulent pas.

Références

Comment citer ce cours ?

Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion, Jean-François Caulier, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).