

Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion

Étude de cas – Les fonctions

Ce cours vous est proposé par Jean-François Caulier, Maître de conférences, Paris-1 Panthéon Sorbonne et par AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Consignes

Cet exercice propose d'utiliser des fonctions linéaires ou affines pour modéliser et analyser des situations économiques et de gestion d'entreprises.

Vous êtes analyste économique dans une entreprise de production de biens de consommation. Votre tâche est de modéliser et analyser plusieurs aspects économiques et de gestion à l'aide des fonctions linéaires et affines.

Données disponibles :

- Coût de production : $C(x) = 50x + 1000$ où x est le nombre d'unités produites,
- Recette de vente : $R(x) = 120x$ où x est le nombre d'unités vendues,
- Fonction de demande : $D(p) = 500 - 3p$ où p est le prix unitaire du bien,
- Fonction d'offre : $O(p) = 2p - 100$ où p est le prix unitaire du bien,

Questions :

Partie 1 : Analyse des fonctions de coût et de recette

1. Calculer le seuil de rentabilité : trouvez le nombre d'unités x pour lequel les coûts de production et les recettes de vente sont égaux.
2. Représentation graphique : tracez les fonctions de coût et de recette sur un même graphique pour des valeurs de x allant de 0 à 100 unités.

Identifiez graphiquement le point de seuil de rentabilité.

3. Calcul du bénéfice : établissez l'expression de la fonction de bénéfice $B(x)$ en fonction des coûts et des recettes.

Calculez le bénéfice pour une production et une vente de 50 unités.

Partie 2 : Analyse de la fonction de demande et d'offre

1. Équilibre du marché : déterminez le prix d'équilibre où la quantité demandée égale la quantité offerte.
2. Représentation graphique :
 - Tracez les fonctions de demande et d'offre sur un même graphique pour des valeurs de prix p allant de 0 à 150 unités,
 - Identifiez graphiquement le point d'équilibre du marché.

Partie 3 : Application en gestion d'entreprise

1. Planification de la production :
 - En utilisant les fonctions de coût et de demande, proposez un plan de production optimal si l'objectif est de maximiser le bénéfice,
 - Justifiez votre plan en termes de nombre d'unités à produire et à quel prix vendre ces unités.
2. Analyse de la sensibilité :
 - Analysez comment une augmentation de 10% des coûts fixes (passant de 1000 à 1100) affecterait le seuil de rentabilité,
 - Représentez graphiquement cette nouvelle situation et comparez-la avec l'ancienne.

Partie 1 : Analyse des fonctions de coût et de recette

1. Calculer le seuil de rentabilité :

Pour trouver le seuil de rentabilité, nous devons résoudre l'équation où les coûts de production égalent les recettes de vente :

$$\begin{aligned} C(x) &= R(x) \\ 50x + 1000 &= 120x \\ 1000 &= 70x \\ x &= \frac{1000}{70} \approx 14,29 \end{aligned}$$

Le seuil de rentabilité se situe donc à environ 15 unités produites et vendues.

2. Représentation graphique :

Pour tracer les fonctions de coût et de recette, nous prenons plusieurs valeurs de x allant de 0 à 100.

x (unités)	$C(x) = 50x + 1000$	$R(x) = 120x$
0	1000	0
20	2000	2400
40	3000	4800
60	4000	7200
80	5000	9600
100	6000	12000

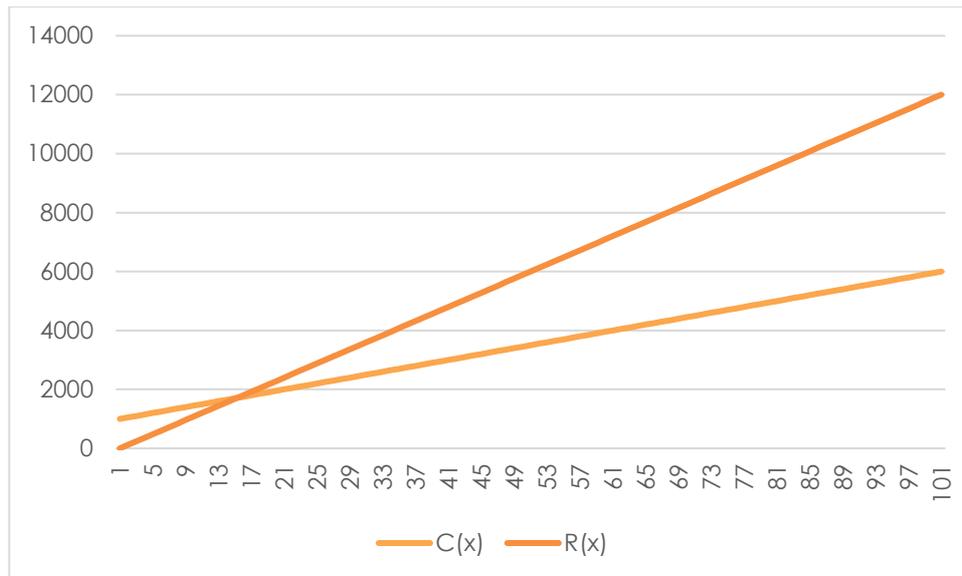


Figure 1 : représentation graphique du seuil de rentabilité

Le point de seuil de rentabilité se situe où les deux courbes se croisent, autour de 14-15 unités.

3. Calcul du bénéfice :

L'expression de la fonction de bénéfice est :

$$\begin{aligned}
 B(x) &= R(x) - C(x) \\
 B(x) &= 120x - (50x + 1000) \\
 B(x) &= 70x - 1000
 \end{aligned}$$

Pour $x = 50$ unités :

$$\begin{aligned}
 B(50) &= 70 \cdot 50 - 1000 \\
 B(50) &= 3500 - 1000 \\
 B(50) &= 2500
 \end{aligned}$$

Le bénéfice pour 50 unités produites et vendues est de 2500.

Partie 2 : Analyse de la Fonction de Demande et d'Offre

1. Équilibre du marché :

Pour trouver le prix d'équilibre, nous résolvons l'équation où la demande égale l'offre :

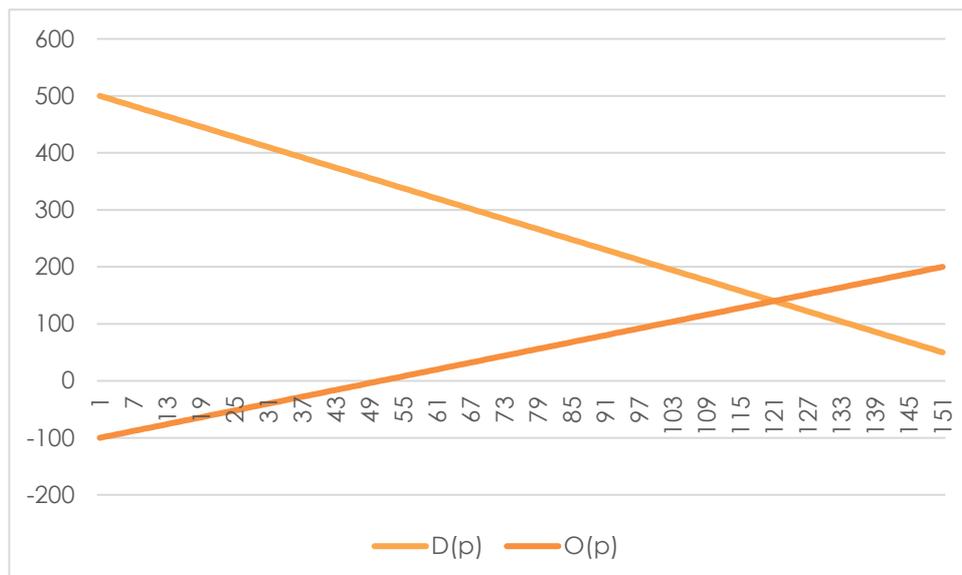
$$\begin{aligned}
 D(p) &= O(p) \\
 500 - 3p &= 2p - 100 \\
 500 + 100 &= 5p \\
 600 &= 5p \\
 p &= \frac{600}{5} = 120
 \end{aligned}$$

Le prix d'équilibre est de 120.

2. Représentation graphique :

Pour tracer les fonctions de demande et d'offre, nous prenons plusieurs valeurs de p allant de 0 à 150.

p (prix)	$D(p) = 500 - 3p$	$O(p) = 2p - 100$
0	500	-100
50	350	0
100	200	100
150	50	200



Le point d'équilibre est où les deux courbes se croisent, à un prix de 120.

Partie 3 : Application en Gestion d'Entreprise

1. Planification de la production :

Pour maximiser le bénéfice, nous devons produire au niveau où $B(x)$ est maximal.

Nous devons aussi tenir compte de la demande. À un prix de 120, selon la fonction de demande : $D(120) = 500 - 3 \cdot 120 = 140$

Nous produirons donc 140 unités pour maximiser le bénéfice au prix d'équilibre de 120

2. Analyse de la sensibilité :

Augmentation de 10% des coûts fixes :

Nouveau coût fixe = $1000 \times 1,1 = 1100$

Nouvelle fonction de coût : $C(x) = 50x + 1100$

Nouveau seuil de rentabilité :

$$50x + 1100 = 120x$$

$$1100 = 70x$$

$$x = \frac{1100}{70} \approx 15,71$$

Le nouveau seuil de rentabilité est d'environ 16 unités.

Références

Comment citer ce cours ?

Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion, Jean-François Caulier, AUNEGe (<http://auneg.fr>), CC – BY NC ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).



Cette œuvre est mise à disposition dans le respect de la législation française protégeant le droit d'auteur, selon les termes du contrat de licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>). En cas de conflit entre la législation française et les termes de ce contrat de licence, la clause non conforme à la législation française est réputée non écrite. Si la clause constitue un élément déterminant de l'engagement des parties ou de l'une d'elles, sa nullité emporte celle du contrat de licence tout entier.

Table des illustrations

Figure 1 : représentation graphique du seuil de rentabilité	4
Figure 2 : représentation graphique de la demande et de l'offre.....	5