Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion

Généralités sur les fonctions usuelles – Les fonctions

Ce cours vous est proposé par Jean-François Caulier, Maître de conférences, Université Paris 1 Panthéon Sorbonne et par AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Table des matières

Préambule

Objectifs :

- Savoir reconnaître et définir une fonction,
- Comprendre les concepts fondamentaux rattachés aux fonctions.

Introduction

Une **fonction** est une relation entre deux variables où chaque valeur de la variable de départ est associée à une seule valeur de la variable d'arrivée. La notion de fonction est fondamentale en économie et gestion car elle permet de modéliser et d'analyser les relations entre différentes variables économiques et de gestion. Avant de définir cette notion formellement, citons rapidement plusieurs exemples concrets d'applications en économie et gestion :

- Fonction de demande : Représente la quantité demandée d'un bien en fonction de son prix,
- Fonction d'offre : Représente la quantité offerte d'un bien en fonction de son prix,
- Fonction de coût : Représente le coût total de production en fonction du niveau de production,
- Fonction de recette : Représente les recettes totales en fonction du niveau de production ou du prix de vente,
- Planification de la production : Déterminer les niveaux de production futurs en fonction de la demande prévue,
- La fonction de consommation keynésienne d'une nation décrit la relation entre le revenu disponible et le niveau de consommation,
- La fonction de production agrée représente la production totale d'une économie en fonction des facteurs de production (en général le capital, le travail et la terre),
- La courbe de Laffer illustre la relation entre taux d'imposition et le montant des recettes fiscales recueillies par l'État,
- La courbe de Phillips tente d'établir une relation entre taux de chômage et le niveau d'inflation,

- La courbe d'Engel montre comment la demande de biens évolue avec le niveau de revenu,
- Le modèle de croissance de Solow représente la relation entre capital, travail et production.

Maintenant que nous sommes convaincus de l'omniprésence des fonctions en économie et gestion, examinons plus en détail sa définition formelle.

Définition

Correspondance, relation, application sont autant de synonymes en langue française du terme fonction. Et pourtant, en mathématiques, ces termes revêtent des définitions spécifiques qui les démarquent les uns des autres. Nous nous concentrerons ici sur la notion de fonction.

Une **fonction numérique (ou réelle)** f est une relation qui associe de manière unique à chaque nombre réel x de son **domaine de définition** un nombre réel $y = f(x)$, lequel représente la valeur de la fonction f en x. Le nombre x est appelé la **variable** (ou l'argument) de la fonction, tandis que y est appelé l'**image** (ou la valeur) de la fonction.

On appelle **domaine de définition** l'ensemble des réels qui ont une image par f.

On note souvent une fonction par f. Le nombre de départ est appelé **antécédent**, et le nombre d'arrivée est appelé **image**. On écrit :

$f : x \to f(x)$

et on dit « x a pour image $f(x)$».

Par exemple, si le prix d'un kilo de pommes est de 2 €, on peut définir une fonction qui prend en entrée le nombre de kilos et qui renvoie le prix total à payer. On définit la fonction $f(x) = 2x$ où x représente le nombre de kilos et $f(x)$ le prix à payer.

Représentation graphique des fonctions

On peut se donner une représentation graphique d'une fonction pour visualiser la relation entre les variables. Chaque point sur le graphique correspond à une paire $(x, f(x))$.

Prenons la fonction $f(x) = 2x$ qui représente le prix des pommes en fonction de leur poids. Voici comment tracer cette fonction pas à pas :

1. **Choisir des valeurs de x** :
   - $x = 0, f(0) = 2 \times 0 = 0$
   - $x = 1, f(1) = 2 \times 1 = 2$
   - $x = 2, f(2) = 2 \times 2 = 4$
2. **Tracer les points correspondants** :
   - Points à tracer : $(0,0), (1,2), (2,4)$.
3. **Relier les points pour obtenir la droite** :

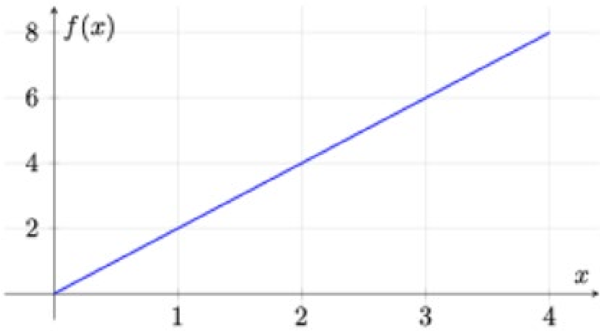

Figure 1 : représentation graphique des fonctions

L'axe horizontal est désigné comme l'axe des abscisses ou l'axe des x, tandis que l'axe vertical est connu sous le nom d'axe des ordonnées ou l'axe des y. Tout x appartenant au domaine de définition de f est interprété comme un point sur l'axe des x. La valeur correspondante de la fonction $y = f(x)$ est interprétée comme un point sur l'axe des y. Cette paire de valeurs décrit un point sur le plan de coordonnées $(x, f(x))$. L'ensemble de ces paires $(x, f(x))$ constitue le **graphe** de la fonction f.

Calculer l'image et l'antécédent

Comprendre comment calculer l'image et l'antécédent d'une fonction est très important. Voici des étapes détaillées pour chaque cas.

1. **Calculer l' image**

   Exemple : pour la fonction $f(x) = -3x + 4$, calculer l'image de 2 :
   - Étapes :
     a) Remplacer x par 2 dans l'expression de $f(x)$,
     b) Calculer $f(2) = -3 \times 2 + 4 = -6 + 4 = -2$.
   - Conclusion : L'image de 2 par f est -2.
2. **Calculer l'antécédent**

   Exemple : pour la fonction $f(x) = 5x - 3$, calculer l'antécédent de 7 :
   - Étapes :

a) Égaliser $f(x)$ à 7 : $5x - 3 = 7$.
b) Résoudre l'équation $5x - 3 = 7$:
   - Ajouter 3 des deux côtés : $5x = 10$,
   - Diviser par 5 : $x = 2$.

- Conclusion : L'antécédent de 7 par f est 2.

Fonctions linéaires et affines

Nous terminons cette section sur les fonctions en présentant les deux fonctions parmi les plus fondamentales (et simples) : les linéaires et affines.

La fonction linéaire

Définition

Pour un paramètre a donné, une fonction linéaire se définit par $f(x) = a \cdot x$. On appelle a le **coefficient** ou la **pente**. Une fonction linéaire indique un rapport de proportionnalité entre la variable et l'image. C'est le cas par exemple d'un taux de change euros/dollars, qui nous donne le rapport entre la valeur de l'euro et celle du dollar. Il indique combien de dollars sont nécessaire pour acheter un euro. Ainsi, si le taux de change euro/dollar vaut 1,20 cela signifie qu'un euro vaut 1,20 dollar. On peut voir ce taux comme un rapport de proportionnalité $t(x) = 1{,}20x$ où x est la quantité d'euros. Si vous avez 100 euros, vous pouvez les échanger contre $t(100) = 120$ dollars.

La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine des axes. Le signe du coefficient (positif ou négatif) indique si la fonction est croissante ou décroissante.

Comment trouver le coefficient d'une fonction linéaire ?

Pour déterminer le coefficient d'une fonction linéaire, il suffit de connaître l'image de cette fonction en un point, par exemple si l'on sait que $f(2) = 4$, puisque la fonction est de la forme $f(x) = ax$, on égalise les deux expressions $f(2) = a \cdot 2$ et $f(2) = 4$ pour trouver $2a = 4$ ou encore $a = 2$. En conclusion, l'expression de la fonction linéaire s'écrit $f(x) = 2x$.

La fonction affine

Définition

Pour définir une fonction affine, on a besoin de deux paramètres a et b. Dans ce cas, l'expression de la fonction affine s'exprime par $f(x) = ax + b$, avec le coefficient a la **pente** ou **coefficient directeur** et b **l'ordonnée à l'origine**. Ainsi, une fonction linéaire est un cas particulier de fonction affine où $b = 0$.

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite qui traverse l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0, b)$, d'où le nom d'ordonnée à l'origine du paramètre b !

Par exemple, prenons la fonction définie par $f(x) = 2x + 3$ et représentons la dans un système d'axes perpendiculaires :

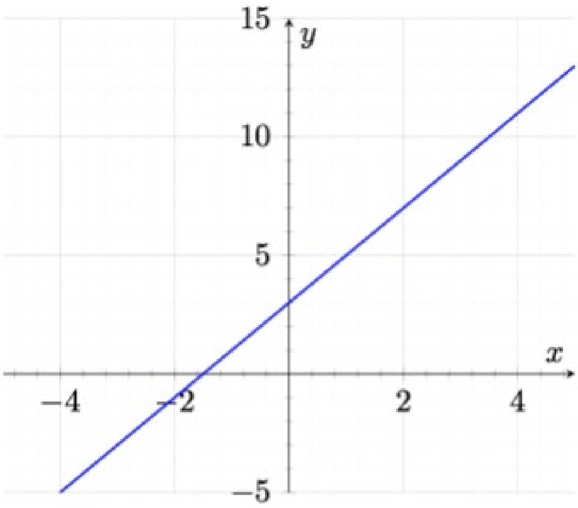

Figure 2 : représentation graphique d'une fonction affine

On peut ainsi constater que la droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0{,}3)$.

Comment déterminer le coefficient directeur d'une fonction affine ?

Pour trouver le paramètre a inconnu d'une fonction affine, il faut et il suffit de connaître deux images de la fonctions en deux points différents. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer qu'il n'existe qu'une seule droite qui passe par deux points donnés. Voici maintenant sous forme d'étapes la méthode à suivre pour déterminer le coefficient directeur :

1. **Identifiez deux points sur la droite notés** (x_1, y_1) et (x_2, y_2).
2. **Utilisez la formule de la pente a calculée comme suit** :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Cette formule représente le changement de la fonction divisé par le changement en x entre les deux points.

Exemple

Imaginons que nous connaissons les points $(1{,}3)$ et $(4{,}11)$. Pour trouver le coefficient directeur a, nous appliquons la formule :

$$a = \frac{11-3}{4-1} = \frac{8}{3}$$

Donc, le coefficient directeur a de la fonction affine est $\frac{8}{3}$

Pour déterminer b après avoir trouvé a, vous pouvez utiliser l'un des points (x_1, y_1). En remplaçant dans la formule de la fonction affine :

$$f(x) = ax + b$$

Vous obtenez :

$$3 = \frac{8}{3}(1) + b$$

En résolvant pour b, vous obtenez :

$$3 = \frac{8}{3} + b \Rightarrow b = 3 - \frac{8}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{3}.$$

Donc, la fonction affine complète serait :

$$f(x) = \frac{8}{3}x + \frac{1}{3}$$

Conclusion

En résumé, la notion de fonction constitue un pilier fondamental dans les domaines de l'économie et de la gestion. Elle est essentielle pour modéliser des relations complexes entre différentes variables, facilitant ainsi la compréhension et l'analyse des phénomènes économiques et managériaux. Les fonctions sont un outil mathématique incontournable pour représenter les relations de dépendance et d'interdépendance entre des variables clés, telles que le prix, la demande, l'offre, les coûts, et les bénéfices.

La maîtrise des concepts reliés aux fonctions permet de s'attaquer à des questions plus larges et plus complexes telles que la modélisation de la croissance économique, l'évaluation des politiques publiques, et l'analyse des risques financiers. Les fonctions servent également de fondement à de nombreuses techniques statistiques et économétriques utilisées pour analyser les données économiques et faire des prédictions éclairées.

En conclusion, la compréhension approfondie de la notion de fonction et de son application est indispensable pour tout économiste ou gestionnaire.

Références

Comment citer ce cours ?

Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion, Jean-François Caulier, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

Table des illustrations