

Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion

Étude de cas – Système d'équations linéaires

Ce cours vous est proposé par Jean-François Caulier, Maître de conférences, Paris-1 Panthéon Sorbonne et par AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Consignes

Cet exercice présente un cas concret d'application économique où la demande d'un bien dépend du prix de ce bien mais également du prix d'un autre bien. Il s'agit de trouver le système de prix qui équilibre les deux marchés.

Contexte

Supposons qu'il y a deux biens dans notre économie, appelés bien X et bien Y , avec une offre et une demande pour chaque bien : O_X, O_Y et D_X, D_Y respectivement. On note P_X et P_Y les prix du bien X et du bien Y respectivement.

L'équilibre partiel sur le marché du bien X est donné par l'équation qui égalise l'offre à la demande $O_X(P_X) = D_X(P_X; P_Y)$, celui sur le marché du bien Y est donné par $O_Y(P_Y) = D_Y(P_X; P_Y)$.

On ne peut pas trouver chaque prix d'équilibre séparément, puisque les deux marchés interagissent, la demande d'un bien dépend du prix de ce bien mais aussi de celui de l'autre bien. Il faut donc résoudre le système de l'équilibre général :

$$\begin{cases} O_X(P_X) = D_X(P_X; P_Y) \\ O_Y(P_Y) = D_Y(P_X; P_Y) \end{cases}$$

pour trouver simultanément P_X et P_Y .

Supposons que les offres sont données par :

$$\begin{aligned} O_X(P_X) &= -100 + 3P_X \\ O_Y(P_Y) &= -150 + 4P_Y \end{aligned}$$

et les demandes par :

$$D_X(P_X, P_Y) = 200 - 2P_X + P_Y$$
$$D_Y(P_Y, P_X) = 300 + P_X - 3P_Y$$

Question

Déterminez les prix P_X et P_Y qui équilibrent cette économie par la méthode de la substitution et ensuite par la méthode de l'élimination.

Corrigé : éléments de réponse

Grâce aux équations des offres et demandes, on réécrit le système :

$$\begin{cases} -100 + 3P_X = 200 - 2P_X + P_Y \\ -150 + 4P_Y = 300 + P_X - 3P_Y \end{cases}$$

Qui après simplification donne :

$$\begin{cases} 5P_X - P_Y = 300 \\ -P_X + 7P_Y = 450 \end{cases}$$

Méthode de substitution

1. **Isoler** P_Y dans la première équation :

$$5P_X - P_Y = 300 \Rightarrow P_Y = 5P_X - 300$$

2. **Substituer** P_Y dans la deuxième équation :

$$-P_X + 7(5P_X - 300) = 450$$

3. **Résoudre** pour P_X :

$$\begin{aligned} -P_X + 35P_X - 2100 &= 450 \\ 34P_X - 2100 &= 450 \\ 34P_X &= 2550 \\ P_X &= \frac{2550}{34} \Rightarrow P_X = 75 \end{aligned}$$

4. **Substituer** P_X pour trouver P_Y :

$$P_Y = 5 \cdot 75 - 300 = 375 - 300 = 75$$

Méthode par élimination

1. Multiplions la première équation par 7 et la deuxième par 1 (pour aligner les coefficients de P_Y):

$$\begin{aligned} 7(5P_X - P_Y) &= 7(300) \Rightarrow 35P_X - 7P_Y = 2100 \\ -P_X + 7P_Y &= 450 \end{aligned}$$

2. Ajouter les deux équations pour éliminer P_Y :

$$\begin{aligned}35P_X - 7P_Y + (-P_X + 7P_Y) &= 2100 + 450 \\34P_X &= 2550 \\P_X &= 75\end{aligned}$$

3. Substituer P_X dans l'une des équations originales pour trouver P_Y :

Utilisons la première équation :

$$\begin{aligned}5P_X - P_Y &= 300 \Rightarrow 5 \cdot 75 - P_Y = 300 \\375 - P_Y &= 300 \\P_Y &= 75\end{aligned}$$

Les prix qui équilibrent cette économie sont $P_X = 75$ et $P_Y = 75$.

Références

Comment citer ce cours ?

Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion, Jean-François Caulier, AUNEGe (<http://aunega.fr>), CC – BY NC ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).



Cette œuvre est mise à disposition dans le respect de la législation française protégeant le droit d'auteur, selon les termes du contrat de licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>). En cas de conflit entre la législation française et les termes de ce contrat de licence, la clause non conforme à la législation française est réputée non écrite. Si la clause constitue un élément déterminant de l'engagement des parties ou de l'une d'elles, sa nullité emporte celle du contrat de licence tout entier.