Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion

Équations et inéquations – Les systèmes d'équations linéaires

Ce cours vous est proposé par Jean-François Caulier, Maître de conférences, Université Paris 1 Panthéon Sorbonne et par AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Table des matières

Préambule

Objectifs :

- Reconnaître quand un système d'équation est linéaire,
- Être en mesure de vérifier si un ensemble de valeurs pour les variables est une solution d'un système,
- Maîtriser plusieurs méthodes de résolution afin de choisir la plus pertinente selon le contexte.

La résolution des systèmes d'équations linéaires est un savoir-faire fondamental en économie et gestion. Ces systèmes permettent de modéliser et d'analyser des situations où plusieurs variables sont en interaction. Par exemple, ils peuvent être utilisés pour optimiser les ressources, prévoir les revenus, minimiser les coûts, et trouver l'équilibre de marché. Comprendre et maîtriser les méthodes de résolution de systèmes d'équations linéaires est essentiel pour prendre des décisions éclairées et efficaces dans le monde des affaires et de l'économie.

Introduction

Une équation à une variable (aussi appelée inconnue) est dite **linéaire** si elle est de la forme $ax = b$ où a et b sont des paramètres et x la variable. On remarque que la variable est de puissance 1. Une équation de type $ax^2 = b$ n'est donc pas linéaire.

Une équation à plusieurs variables est linéaire si elles apparaissent toutes à la puissance 1. Une équation linéaire à deux inconnues est donc du type $ax + by = c$ où a, b et c sont des paramètres, x et y sont les inconnues.

Une équation est **satisfaite** lorsque l'égalité est observée pour les valeurs attribuées aux inconnues.

Un **système d'équations linéaires** est un ensemble d'équations où toutes les variables ou inconnues sont de degré 1 au maximum.

Une **solution** d'un système d'équations est un ensemble de valeurs des variables tel que toutes les équations sont satisfaites.

Par exemple, le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ \quad\ \ 2y = 4 \end{cases}$$

est constitué de deux équations linéaires en x et y. Ces variables apparaissent dans la première équation avec un degré 1 et dans la seconde équation, y est de degré 1 et x de degré 0. Une solution de ce système est $x = 1$ et $y = 2$.

Il existe de nombreuses méthodes de résolution de systèmes d'équations linéaires, dont certaines font appel au calcul matriciel. Notre objectif ici est plus humble puisque nous allons nous contenter de passer en revue les trois méthodes les plus simples.

Méthode par substitution

La méthode par substitution consiste à isoler dans l'une des équations une variable, puis à substituer cette expression dans les autres équations. Voici les étapes pour cette méthode :

1. Choisir une des équations et isoler l'une des variables,
2. Substituer cette expression dans les autres équations,
3. Résoudre le système réduit pour obtenir les valeurs des autres variables,
4. Utiliser ces valeurs pour trouver la valeur de la première variable.

Exemple

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

1. **Isoler y dans la première équation** :

$$y = 10 - x$$

2. **Substituer cette expression dans la deuxième équation** :

$$\begin{aligned} &2x - (10 - x) = 3 \\ &2x - 10 + x = 3 \\ &3x - 10 = 3 \\ &3x = 13 \\ &x = \frac{13}{3} \end{aligned}$$

3. **Substituer** $x = \frac{13}{3}$ dans $y = 10 - x$:

$$y = 10 - \frac{13}{3}$$
$$y = \frac{30}{3} - \frac{13}{3}$$
$$y = \frac{17}{3}$$

La solution du système est $(x, y) = \left(\frac{13}{3}, \frac{17}{3}\right)$.

Méthode par élimination

La méthode par élimination consiste à combiner les équations de manière à éliminer une des variables. Voici les étapes pour cette méthode :

1. Multiplier les équations si nécessaire pour aligner les coefficients de l'une des variables.
2. Ajouter ou soustraire les équations pour éliminer cette variable.
3. Résoudre l'équation obtenue pour une des variables restantes.
4. Substituer cette valeur dans l'une des équations originales pour trouver l'autre variable.

Exemple

Considérons le même système :

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

1. **Multiplier la première équation par 2 pour aligner les coefficients de x** :

$$\begin{cases} 2x + 2y = 20 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

2. **Soustraire la deuxième équation de la première pour éliminer x** :

$$2x + 2y - (2x - y) = 20 - 3$$
$$3y = 17$$
$$y = \frac{17}{3}$$

3. **Substituer** $y = \frac{17}{3}$ dans la première équation :

$$x + \frac{17}{3} = 10$$
$$x = 10 - \frac{17}{3}$$
$$x = \frac{30}{3} - \frac{17}{3}$$
$$x = \frac{13}{3}$$

La solution est $(x, y) = \left(\frac{13}{3}, \frac{17}{3}\right)$.

Méthode par égalisation

La méthode par égalisation consiste à exprimer une même variable en fonction des autres à partir de deux équations différentes et ensuite les égaliser.

Voici les étapes pour cette méthode :

1. Résoudre chaque équation pour une des variables.
2. Égaliser les deux expressions obtenues pour cette variable.
3. Résoudre l'équation résultante pour trouver la valeur d'une variable.
4. Substituer cette valeur dans l'une des expressions originales pour trouver l'autre variable.

Exemple

Prenons encore le même système :

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

1. **Résoudre chaque équation pour y** :
   $y = 10 - x$ (de la première équation)
   $y = 2x - 3$ (de la deuxième équation)
2. **Égaliser les deux expressions de y** :

$$\begin{aligned} &10 - x = 2x - 3 \\ &10 + 3 = 2x + x \\ &13 = 3x \\ &x = \frac{13}{3} \end{aligned}$$

3. **Substituer** $x = \frac{13}{3}$ dans $y = 10 - x$:

$$\begin{aligned} &y = 10 - \frac{13}{3} \\ &y = \frac{30}{3} - \frac{13}{3} \\ &y = \frac{17}{3} \end{aligned}$$

La solution est $(x, y) = \left(\frac{13}{3}, \frac{17}{3}\right)$.

Conclusion

Chaque méthode de résolution de systèmes d'équations linéaires a ses propres avantages en fonction du contexte et de la nature des équations. La substitution est souvent simple et directe, l'élimination est puissante pour les systèmes avec des coefficients commodes, et l'égalisation est efficace pour des expressions symétriques. En maîtrisant ces trois techniques, on est déjà bien équipé pour résoudre une large gamme de systèmes d'équations linéaires pas trop compliquées.

Références

Comment citer ce cours ?

Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion, Jean-François Caulier, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).