Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion

Étude de cas – Inéquations

Ce cours vous est proposé par Jean-François Caulier, Maître de conférences, Paris-1Panthéon Sorbonne et par AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Consignes

Cet exercice combine plusieurs inéquations en une et n'est techniquement réalisable qu'avec un tableau du signe pour la conclusion.

Question :

Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = \frac{4t^2 + 5t - 6}{2t^2 - 3t - 5} \leq 0$$

Corrigé : éléments de réponse

On commence par déterminer les racines de $P(t)$ et $Q(t)$:

- Pour $P(t) = 4t^2 + 5t - 6$, résolvons $4t^2 + 5t - 6 = 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6) = 25 + 96 = 121$$
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{-5 \pm 11}{8}$$
$$t_1 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \ t_2 = \frac{-16}{8} = -2$$

- Pour $Q(t) = 2t^2 - 3t - 5$, résolvons $2t^2 - 3t - 5 = 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49$$
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm 7}{4}$$
$$t_1 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}, \ t_2 = \frac{-4}{4} = -1$$

Les deux polynômes ont un coefficient a positif, ils sont donc toujours de signe positif entre leurs racines, où ces polynômes sont de signe négatif.

Les racines de $P(t)$ sont $t = \frac{3}{4}$ et $t = -2$, donc $P(t) \leq 0$ pour $t \in \left[-2; \frac{3}{4}\right]$.

Les racines de $Q(t)$ sont $t = \frac{5}{2}$ et $t = -1$, donc $Q(t) \leq 0$ pour $t \in \left[-1; \frac{5}{2}\right]$.

Construisons maintenant le tableau de signe.

Pour construire le tableau de signe, nous déterminons le signe de chaque facteur dans chaque intervalle délimité par les racines trouvées.

Intervalles	$t < -2$	$-2 < t < -1$	$-1 < t < \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} < t < \frac{5}{2}$	$t > \frac{5}{2}$
$P(t)$	+	-	-	+	+
$Q(t)$	+	+	-	-	+
$\frac{P(t)}{Q(t)}$	+	-	+	-	+

L'inéquation $\frac{4t^2+5t-6}{2t^2-3t-5} \leq 0$ est satisfaite dans les intervalles où le rapport est négatif ou nul. Les intervalles pertinents sont :

$$t \in [-2; -1[\cup \left[\frac{3}{4} ; \frac{5}{2}\right[$$

Attention

Les points où $Q(t) = 0$ ont été exclus car ils rendent la fonction indéfinie, on exclut donc les points -1 et $\frac{5}{2}$.

Références

Comment citer ce cours ?