

Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion

Étude de cas – Inéquations

Ce cours vous est proposé par Jean-François Caulier, Maître de conférences, Paris-1 Panthéon Sorbonne et par AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Consignes

Cet exercice combine plusieurs inéquations en une et n'est techniquement réalisable qu'avec un tableau du signe pour la conclusion.

Question :

Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = \frac{4t^2 + 5t - 6}{2t^2 - 3t - 5} \leq 0$$

Corrigé : éléments de réponse

On commence par déterminer les racines de $P(t)$ et $Q(t)$:

- Pour $P(t) = 4t^2 + 5t - 6$, résolvons $4t^2 + 5t - 6 = 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6) = 25 + 96 = 121$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{-5 \pm 11}{8}$$

$$t_1 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, t_2 = \frac{-16}{8} = -2$$

- Pour $Q(t) = 2t^2 - 3t - 5$, résolvons $2t^2 - 3t - 5 = 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm 7}{4}$$

$$t_1 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}, t_2 = \frac{-4}{4} = -1$$

Les deux polynômes ont un coefficient a positif, ils sont donc toujours de signe positif entre leurs racines, où ces polynômes sont de signe négatif.

Les racines de $P(t)$ sont $t = \frac{3}{4}$ et $t = -2$, donc $P(t) \leq 0$ pour $t \in \left[-2; \frac{3}{4}\right]$.

Les racines de $Q(t)$ sont $t = \frac{5}{2}$ et $t = -1$, donc $Q(t) \leq 0$ pour $t \in \left[-1; \frac{5}{2}\right]$.

Construisons maintenant le tableau de signe.

Pour construire le tableau de signe, nous déterminons le signe de chaque facteur dans chaque intervalle délimité par les racines trouvées.

Intervalles	$t < -2$	$-2 < t < -1$	$-1 < t < \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} < t < \frac{5}{2}$	$t > \frac{5}{2}$
$P(t)$	+	-	-	+	+
$Q(t)$	+	+	-	-	+
$\frac{P(t)}{Q(t)}$	+	-	+	-	+

L'inéquation $\frac{4t^2+5t-6}{2t^2-3t-5} \leq 0$ est satisfaite dans les intervalles où le rapport est négatif ou nul. Les intervalles pertinents sont :

$$t \in [-2; -1[\cup \left[\frac{3}{4}; \frac{5}{2}\right[$$

Attention

Les points où $Q(t) = 0$ ont été exclus car ils rendent la fonction indéfinie, on exclut donc les points -1 et $\frac{5}{2}$.

Références

Comment citer ce cours ?

Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion, Jean-François Caulier, AUNEGe (<http://auneg.fr>), CC – BY NC ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).



Cette œuvre est mise à disposition dans le respect de la législation française protégeant le droit d'auteur, selon les termes du contrat de licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>). En cas de conflit entre la législation française et les termes de ce contrat de licence, la clause non conforme à la législation française est réputée non écrite. Si la clause constitue un élément déterminant de l'engagement des parties ou de l'une d'elles, sa nullité emporte celle du contrat de licence tout entier.