Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion

Équations et inéquations – les inéquations

Ce cours vous est proposé par Jean-François Caulier, Maître de conférences, Université Paris 1 Panthéon Sorbonne et par AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Table des matières

Préambule

Objectifs :

- Comprendre et savoir manipuler les inéquations pour déterminer les intervalles de valeurs répondant à une condition donnée.

Introduction

Les inéquations sont des outils mathématiques fondamentaux utilisés pour exprimer des relations d'inégalité entre deux expressions ou valeurs. À la différence des équations, qui affirment l'égalité entre deux quantités, les inéquations démontrent que ces quantités sont inégales. Ainsi, au lieu de vouloir une balance en équilibre, on souhaite au contraire qu'elle penche d'un côté !

On représente les inéquations par les symboles > (supérieur à), < (inférieur à), ≥ (supérieur ou égal), et ≤ (inférieur ou égal). Comprendre et savoir manipuler ces inéquations est crucial dans divers domaines, allant de l'algèbre simple à des applications plus complexes en économie, en gestion et finance.

Propriétés Fondamentales des Inéquations

Les inéquations obéissent à des règles spécifiques qui permettent de les manipuler pour résoudre des problèmes ou simplifier des expressions. Voici quelques-unes des propriétés les plus importantes.

Transitivité

La propriété de transitivité est un principe de base qui stipule que si une valeur a est plus grande que b, et b est plus grande que c, alors a est nécessairement plus grande que c. Cette propriété est intuitive et largement utilisée pour comparer des valeurs.

Exemple

Si le salaire de Tom ($50\,000$ €) est supérieur à celui de Jerry ($40\,000$ €), et le salaire de Jerry est supérieur à celui de Bob ($30\,000$ €), alors on peut conclure sans vérification directe que le salaire de Tom est supérieur à celui de Bob.

Addition/Soustraction

Ajouter ou soustraire le même nombre des deux côtés d'une inéquation ne modifie pas la relation d'inégalité. Cette propriété permet d'isoler des termes lors de la résolution d'inéquations.

Exemple

Considérons l'inéquation $x + 5 > 10$. En soustrayant 5 des deux côtés, nous obtenons $x > 5$. L'inégalité reste valide après la soustraction.

Multiplication/Division

Multiplier ou diviser les deux côtés d'une inéquation par un même nombre positif ne change pas le sens de l'inégalité. Cependant, si le nombre est négatif, le sens de l'inégalité doit être inversé, ce qui est une règle cruciale en algèbre.

Exemple

Si $3 > 2$ et nous multiplions chaque côté par 5, alors $3 \times 5 > 2 \times 5$ donc $15 > 10$. Si maintenant nous multiplions les deux membres de l'inéquation par un nombre négatif, par (-2) par exemple, alors on obtient $3 \times (-2) < 2 \times (-2)$, en effet $-6 < -4$.

Exemple introductif

Appliquons ces principes très généraux à la résolution de l'inéquation suivante :

$$\boxed{-3 - 5 > 10.}$$

La première étape consiste à isoler le terme en x, pour cela nous allons compenser le -5 qui l'accompagne à gauche en ajoutant 5. Ce que l'on fait d'un côté, on le fait de l'autre pour garantir l'inégalité :

$$-3x - 5 + 5 > 10 + 5$$

Ce qui devient :

$$-3x > 15$$

<u>Maintenant, nous devons isoler x</u>. Comme $-3x$ est multiplié par -3, nous devons diviser chaque côté de l'inéquation par - 3. Important : Diviser ou multiplier les deux côtés d'une inéquation par un nombre négatif inverse le sens de l'inégalité. Donc :

$$\frac{-3x}{-3} < \frac{15}{-3}$$

Cela nous donne :

$$x < -5$$

L'inéquation $x < -5$ signifie que toutes les valeurs de x qui sont inférieures à -5 satisferont l'inéquation originale. La solution de cette inéquation peut être représentée sur une ligne numérique où tous les points à gauche de -5 (non inclus) sont colorés ou marqués pour indiquer qu'ils font partie de la solution.
Il est toujours judicieux, dans les premiers temps de la manipulation d'inéquations, même si expérience faisant nous ne procéderons plus à ce type de vérification, de vérifier notre solution en substituant des valeurs de x qui devraient satisfaire l'inéquation, ainsi que des valeurs qui ne le devraient pas :

- Vérification avec $x = -6$ (qui devrait satisfaire l'inéquation) :

  $$-3(-6) - 5 = 18 - 5 = 13$$

  $13 > 10$ est vrai, donc $x = -6$ est une solution valide.

- Vérification avec $x = -4$ (qui ne devrait pas satisfaire l'inéquation) :

  $$-3(-4) - 5 = 12 - 5 = 7$$

  $7 > 10$ est faux, donc $x = -4$ n'est pas une solution.

Inéquations linéaires à une variable

Une inéquation linéaire à une variable est un type fondamental d'inéquation le plus simple que l'on puisse rencontrer. Elle prend la forme $ax + b > c$ ou $ax + b < c$, où a, b, et c sont des constantes. Cette structure représente une relation où, contrairement à une équation, les deux membres ne sont pas égaux mais l'un est supérieur à l'autre.

Exemple 1

Résoudre $2x - 3 > 7$

Pour résoudre l'inéquation $2x - 3 > 7$, la première étape consiste à isoler le terme contenant la variable x. Cela implique d'éliminer le -3 du côté gauche de l'inéquation en **ajoutant 3** des deux côtés :

$$2x - 3 \mathbf{+ 3} > 7 \mathbf{+ 3}$$

Ce qui revient à :

$$2x > 10$$

L'objectif est maintenant de résoudre pour x. Puisque $2x$ signifie 2 multiplié par x, pour isoler x, nous **divisons** chaque côté de l'inéquation **par 2** :

$$\frac{2x}{\mathbf{2}} > \frac{10}{\mathbf{2}}$$

Cela donne :

$$x > 5$$

La solution à l'inéquation $x > 5$ indique que tout nombre supérieur à 5 satisfait l'inéquation originale $2x - 3 > 7$. Cette solution peut être représentée sur une droite numérique où tous les points au-delà de 5, sans inclure 5, sont solutions de l'inéquation.

Exemple 2

$$3x - 7 > 2x + 5$$

Le but initial est d'isoler les termes de la variable x d'un côté de l'inéquation. Pour ce faire, nous commençons par **éliminer $2x$** du membre de droite en le soustrayant des deux côtés de l'inéquation.

$$3x - 7 \mathbf{- 2x} > 2x + 5 \mathbf{- 2x}$$

Cela se simplifie en :

$$x - 7 > 5$$

La prochaine étape consiste à isoler x en **ajoutant 7** de chaque côté de l'inéquation pour annuler le -7.

$$x - 7 + 7 > 5 + 7$$

Ce qui donne :

$$x > 12$$

L'inéquation $x > 12$ signifie que la solution à notre inéquation comprend toutes les valeurs de x qui sont plus grandes que 12. Cette solution peut être exprimée sous forme d'un intervalle :

$$x \in]12, \infty[$$

Inéquations quadratiques

Une inéquation quadratique prend une des formes générales suivantes :

$$ax^2 + bx + c > 0$$

ou

$$ax^2 + bx + c < 0$$

ou

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

ou

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

Détermination du signe du Trinôme

Le signe d'un trinôme quadratique $ax^2 + bx + c$ est déterminé par le coefficient a. Voici comment analyser le signe en fonction de a :

1. **Si $a > 0$:**
    - Le trinôme est toujours positif en dehors des intervalles entre ses éventuelles deux racines réelles,

- Entre ses racines (s'il y en a), le trinôme est négatif.

2. **Si $a < 0$:**

   - Le trinôme est toujours négatif en dehors des intervalles entre ses éventuelles deux racines réelles.
   - Entre ses racines (s'il y en a), le trinôme est positif.

Exemple

Considérons l'inéquation suivante :

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

Cette inéquation peut être réécrite sous la forme factorisée :

$$(x-2)(x-3) > 0$$

Pour résoudre cette inéquation, procédons selon les étapes suivantes :

1. **Détermination des racines :**
   Les racines de $x^2 - 5x + 6 = 0$ sont $x = 2$ et $x = 3$.
2. **Étude du signe du trinôme :**
   Le trinôme $(x-2)(x-3)$ change de signe aux racines $x = 2$ et $x = 3$.
   On analyse les signes dans les intervalles délimités par ces racines :
   Pour $x < 2$, les deux facteurs $(x-2)$ et $(x-3)$ sont négatifs, donc leur produit est positif.
   Pour $2 < x < 3, (x-2)$ est positif et $(x-3)$ est négatif, donc leur produit est négatif.
   Pour $x > 3$, les deux facteurs $(x-2)$ et $(x-3)$ sont positifs, donc leur produit est positif.
3. **Tableau de signe :**

Intervalle	$x < 2$	$2 < x < 3$	$x > 3$
$x-2$	-	+	+
$x-3$	-	-	+
$(x-2)(x-3)$	+	-	+

Tableau 1 : inéquation quadratique - Tableau de signes du trinôme

4. **Conclusion :**

   L'inéquation $(x-2)(x-3) > 0$ est satisfaite pour $x \in]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$.

Ainsi, la solution de l'inéquation $x^2 - 5x + 6 > 0$ est $x \in]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$.

Inéquations rationnelles

Une inéquation rationnelle se définit généralement comme une fraction rationnelle comparée à zéro. Une fraction rationnelle est un quotient où le numérateur et le dénominateur sont des polynômes. La forme générale d'une inéquation rationnelle est :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes tels que $Q(x)$ ne s'annule pas, car cela rendrait la fraction indéfinie. Les valeurs de x qui annulent le dénominateur sont appelées valeurs interdites.

Exemple

Supposons l'inéquation suivante :

$$\frac{x-1}{x^2-4} > 0$$

Nous allons résoudre cette inéquation en plusieurs étapes.

1. **Nous allons d'abord factoriser le dénominateur** $x^2 - 4$. Le polynôme $x^2 - 4$ est une identité remarquable :

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

L'inéquation devient alors :

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+2)} > 0$$

2. Les valeurs qui annulent le dénominateur sont $x = 2$ et $x = -2$. Ces **valeurs sont interdites** car elles rendent la fraction indéfinie. Donc, $x \neq 2$ et $x \neq -2$.

3. Pour déterminer les signes du numérateur et du dénominateur dans les différents intervalles, nous devons **analyser les signes des facteurs** $(x-1)$, $(x-2)$, et $(x+2)$.

4. **Nous allons utiliser un tableau de signes** pour comprendre comment les signes de chaque facteur influencent le signe global du rapport. Nous analysons les signes dans les intervalles déterminés par les valeurs interdites et les racines.

Intervalle	$x < -2$	$-2 < x < 1$	$1 < x < 2$	$x > 2$
$x - 1$	-	-	+	+
$x - 2$	-	-	-	+
$x + 2$	-	+	+	+
$\frac{x-1}{(x-2)(x+2)}$	+	-	+	+

Tableau 2 : inéquation rationnelle - Tableau de signes

- Intervalle $x < -2$:
  - $x - 1$ est négatif.
  - $x - 2$ est négatif.
  - $x + 2$ est négatif.
  - Produit des signes : $(-) * (-) * (-) = (-)$, donc le rapport est positif.
- Intervalle $-2 < x < 1$:
  - $x - 1$ est négatif.
  - $x - 2$ est négatif.
  - $x + 2$ est positif.
  - Produit des signes : $(-)^*(-)^*(+) = (-)$, donc le rapport est négatif.
- Intervalle $1 < x < 2$:
  - $-x - 1$ est positif.
  - $x - 2$ est négatif.
  - $x + 2$ est positif.
  - Produit des signes : $(+) * (-) * (+) = (-)$, donc le rapport est négatif.
- Intervalle $x > 2$:
  - $x - 1$ est positif.
  - $x - 2$ est positif.
  - $x + 2$ est positif.

- Produit des signes : (+)*(+)*(+) = (+), donc le rapport est positif.

5. Résumons :

L'inéquation $\frac{x-1}{(x-2)(x+2)} > 0$ est satisfaite pour les intervalles où le rapport est positif. D'après le tableau de signes, cela se produit pour $x \in]\ \infty, -2[\cup]1{,}2[\cup]2, +\infty[$. Ainsi, la solution de l'inéquation $\frac{x-1}{x^2-4} > 0$ est :

$$x \in]-\infty, -2[\cup]1{,}2[\cup]2, +\infty[$$

Références

Comment citer ce cours ?

Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion, Jean-François Caulier, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

Tableaux