Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion

Équations et inéquations – Les équations

Ce cours vous est proposé par Jean-François Caulier, Maître de conférences, Université Paris 1 Panthéon Sorbonne et par AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Table des matières

Préambule

Objectifs :

- Apprendre à résoudre efficacement différents types d'équations, notamment linéaires et quadratiques,
- Appliquer les équations à des contextes économiques : Utiliser des équations pour modéliser et résoudre des problèmes réels en économie et en gestion, tels que le calcul de seuil de rentabilité et des prix d'équilibre de marché.

Introduction

Une équation est une proposition mathématique qui établit une égalité entre deux expressions algébriques, désignées comme le membre de gauche (MG) et le membre de droite (MD), séparées par un signe égal (=). Cette structure est au cœur des mathématiques et joue un rôle crucial dans divers champs d'études économiques et de gestion. Elle permet de formuler des relations entre variables et de résoudre des problèmes allant de simples calculs quotidiens à des questions complexes de finance de marché par exemple.

Définition et composantes d'une équation

Une équation est comme une balance où les poids installés à gauche doivent correspondre à ceux installés à droite pour être à l'équilibre.

Définition

Une **équation** affirme que deux quantités ou expressions sont égales. Elle peut être aussi simple que $x + 2 = 5$ ou encore $ax^2 + bx + c = 0$, où x est une variable et a, b, c sont des constantes qui spécifient les termes de l'équation. Une équation est constituée d'une ou plusieurs variables ainsi que de constantes, que nous allons maintenant définir.

Composantes

Variables

Les variables, comme x ou y, représentent les quantités inconnues dans une équation. Elles sont les cibles principales du processus de résolution, où l'objectif est de découvrir les valeurs des variables qui rendent l'équation vraie.

Coefficients

Les coefficients sont les nombres qui multiplient les variables dans une équation. Par exemple, dans l'équation $3x + 5 = 11$, le nombre 3 est un coefficient. Il indique combien de fois la variable est comptée dans cette partie de l'équation.

Termes constants

Les termes constants sont les nombres seuls, sans variables accompagnatrices. Dans $3x + 5 = 11$, les nombres 5 et 11 sont des termes constants. Ils jouent un rôle clé dans l'équilibre de l'équation.

Opérateurs

Les opérateurs sont les symboles qui indiquent les opérations mathématiques à effectuer entre les variables et les constantes, tels que plus (+), moins (-), multiplié par (×), et divisé par (/).

Rôle des équations

Les équations sont un outils mathématiques de base et sont appliqués dans des contextes de gestion pour résoudre des problèmes concrets tels que l'évaluation de la rentabilité (équation ROI, Return On Investment), du niveau de production ou de vente où l'entreprise ne réalise ni perte ni profit (équation du Break-Even Point), de l'effet des coûts fixes sur le profit lorsque le revenu change (équation du levier opérationnel) ou encore de la valeur actuelle nette pour évaluer la rentabilité d'un projet (équation VAN).

Résolution d'une équation

La résolution d'une équation implique de trouver la valeur ou l'ensemble de valeurs pour les variables qui équilibrent les deux membres de l'équation. Avant de détailler plus en détail les procédures à suivre dans les sections suivantes, examinons un exemple d'équation linéaire $2x + 3 = 7$:

- Isoler la variable :
  Soustraire 3 de chaque côté pour obtenir $2x = 4$.
- Simplifier :
  Diviser chaque côté par 2 pour isoler x et obtenir $x = 2$.
- Vérifier :
  Remplacer x par 2 dans l'équation initiale pour s'assurer que $7 = 7$, confirmant ainsi que la solution est correcte.

Équations linéaires avec une seule variable

Les équations linéaires constituent une des formes les plus élémentaires et les plus fréquemment utilisées en algèbre. Une équation linéaire est définie comme une équation de premier degré, ce qui signifie que la variable (ou les variables selon), n'est élevée à aucune puissance supérieure à un. Typiquement, ce type d'équation prend la forme $ax + b = 0$, où a et b sont des constantes. Cette structure simple permet une grande variété d'applications pratiques, allant de la résolution de problèmes quotidiens à l'analyse de situations plus complexes en sciences économiques et gestion.

Propriétés des équations linéaires

Les équations linéaires obéissent à plusieurs propriétés fondamentales qui facilitent leur manipulation et résolution. Ces propriétés sont essentielles pour comprendre comment les opérations sur les équations affectent l'égalité :

1. Addition et soustraction de constantes : si P et Q sont deux expressions en x, et c un réel différent de zéro, alors :

- Si $P = Q$, alors $P + c = Q + c$.
- Si $P = Q$, alors $P - c = Q - c$.

2. Multiplication et division par une constante :

- Si $P = Q$, alors $P \times c = Q \times c$.
- Si $P = Q$, alors $P/c = Q/c$, à condition que $c \neq 0$.

Exemple de Résolution d'une Équation Linéaire

Considérons l'équation suivante : $5 + 3(2x - 5) = 12 - (2x + 4)$.

Étape 1 : Distribution des multiplications

$5 + 3 \times 2x - 3 \times 5 = 12 - 2x - 4$

Étape 2 : Simplification initiale

$5 + 6x - 15 = 12 - 2x - 4$

Étape 3 : Simplifier les constantes de chaque côté

$-10 + 6x = 8 - 2x$

Étape 4 : Ajouter $2x$ des deux côtés pour commencer à isoler x $-10 + 6x + 2x = 8$

Étape 5 : Simplification finale

$-10 + 8x = 8$

Étape 6 : ajouter 10 des deux côtés pour isoler les termes en x

$8x = 18$

Étape 7 : diviser par 8 des deux côtés pour trouver la valeur de x

$x = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$

Équations quadratiques

Ces équations ont déjà fait l'objet d'une première présentation dans le chapitre des polynômes, en effet une équation quadratique consiste en un polynôme de degré 2. Ces équations décrivent graphiquement des paraboles et sont formulées sous la forme standard $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b, et c représentent les coefficients et doivent respecter $a \neq 0$ pour que l'équation soit effectivement quadratique.

Forme et solutions de l'équation quadratique

La résolution d'équations quadratiques peut se faire par plusieurs méthodes, mais la plus courante est l'utilisation de la formule quadratique, qui fait usage du Delta $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Cette formule est cruciale car elle offre deux solutions quand Δ est positif, représentant les points où la parabole intersecte l'axe des x.

Exemple Illustratif

Considérons l'équation $2x^2 - 4x - 6 = 0$. En appliquant la formule quadratique, nous procédons comme suit :

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2}$$
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{4}$$
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{4}$$
$$x = \frac{4 \pm 8}{4}$$
$$x = 3 \text{ ou } x = -1$$

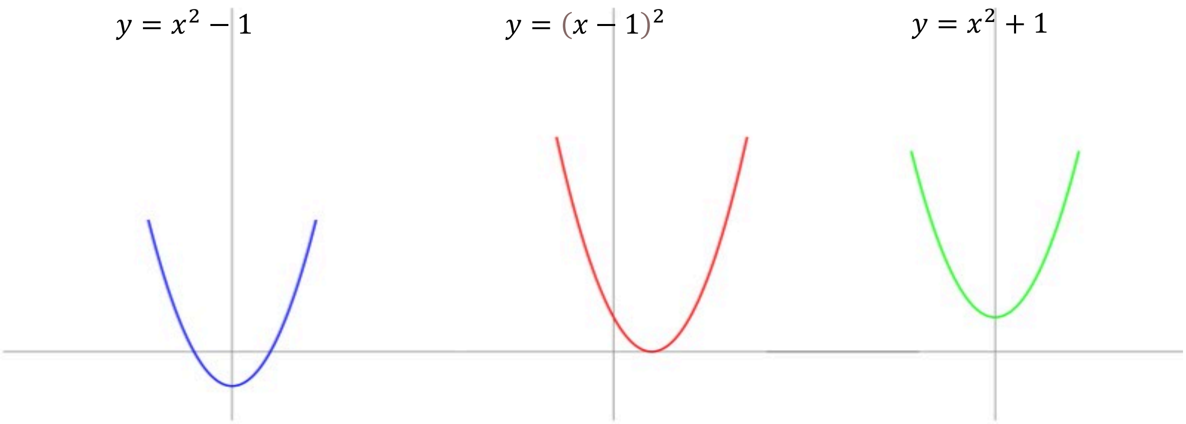
Ces valeurs, $x = 3$ et $x = -1$, représentent les points où la parabole coupe l'axe des x.

Graphique d'une équation quadratique

Graphiquement, une équation quadratique est représentée par une parabole dont la direction (vers le haut ou vers le bas) est déterminée par le signe du coefficient a :

- Si $a > 0$, la parabole s'ouvre vers le haut.
- Si $a < 0$, elle s'ouvre vers le bas.

Figure 1 : parabole s'ouvrant vers le haut



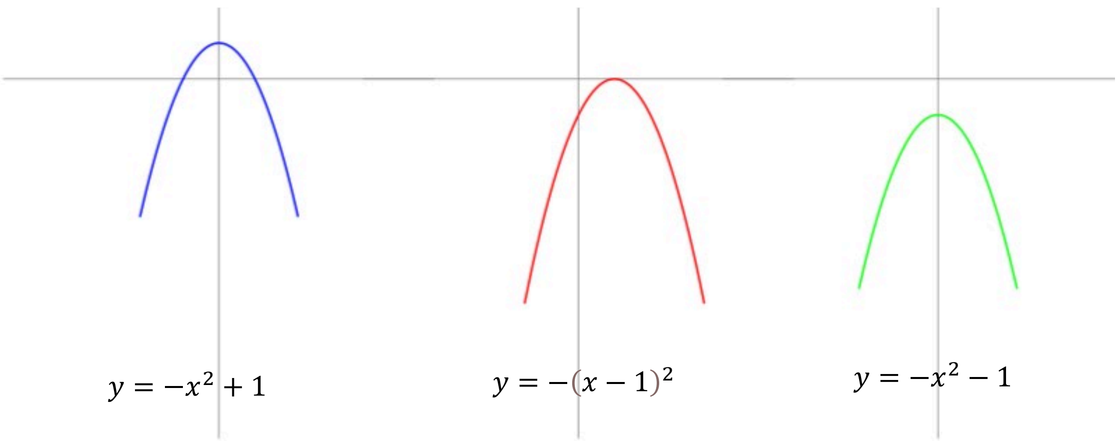


Figure 2 : parabole s'ouvrant vers le bas

Caractéristiques importantes de la parabole

- **Sommet** : le point le plus haut ou le plus bas de la parabole, situé à $x = -\frac{b}{2a}$.
- **Axe de Symétrie** : ligne verticale qui passe par le sommet et peut être définie par $x = -\frac{b}{2a}$.
- **Zéros ou Racines** : ces termes désignent les points où la parabole intersecte l'axe des x, correspondant aux solutions de l'équation quadratique dérivées précédemment.

Les équations quadratiques sont fondamentales pour modéliser et comprendre une variété de situations en économie, où les maxima ou les minima sont par exemple cruciaux pour déterminer les coûts et les profits optimaux.

Équations rationnelles

Les équations rationnelles sont des expressions algébriques qui mettent en jeu des quotients de polynôme. Elles s'expriment souvent sous la forme de fractions où les numérateurs et les dénominateurs sont des polynômes. La forme générale d'une équation rationnelle est :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)}$$

où $P(x), Q(x), R(x)$, et $S(x)$ sont des polynômes. Il est crucial que $Q(x)$ et $S(x)$, les dénominateurs, ne soient pas nuls car cela rendrait l'équation indéfinie.

Exemple introductif

Pour illustrer comment résoudre une équation rationnelle, considérons l'exemple suivant :

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = 0$$

1. Identifier les valeurs interdites

   Avant de procéder à la résolution de l'équation, il est essentiel de déterminer les valeurs de x qui annulent les dénominateurs, car ces valeurs sont interdites. Pour l'équation donnée :

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

On trouve que $x = 2$ et $x = 3$ sont des valeurs interdites, puisque le dénominateur devient nul pour ces valeurs.

2. Simplification de l'expression

   La prochaine étape consiste à simplifier l'équation, en annulant les termes communs dans le numérateur et le dénominateur, tout en prenant en compte les valeurs interdites. La factorisation du numérateur, qui est une différence de carrés, donne :

$$\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = 0$$

En simplifiant par $x - 2$ (en excluant $x = 2$), nous obtenons :

$$\frac{x+2}{x-3} = 0$$

3. Résoudre l'équation simplifiée

   Il ne reste plus qu'à isoler la variable x :

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

4. Vérification des solutions

   Il est vital de vérifier que la solution trouvée ne rend pas le dénominateur initial nul.

   Pour $x = -2$:

$$x^2 - 5x + 6 = (-2)^2 - 5(-2) + 6 = 4 + 10 + 6 = 20$$

Le dénominateur n'est pas nul ; donc, $x = -2$ est une solution valide.

Méthode de résolution alternative : égalisation des numérateurs

Si l'équation est de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)}$, une autre méthode consiste à égaliser les numérateurs en utilisant un produit en croix, tout en veillant à exclure les valeurs qui annulent les dénominateurs. Ceci implique de résoudre :

$$P(x)S(x) = R(x)Q(x)$$

Cela peut offrir une alternative pour manipuler directement les expressions polynomiales sans passer par la simplification de fractions.

Conclusion

Dans ce chapitre sur les équations, nous avons pu observer la polyvalence et l'importance fondamentale des équations en gestion et en économie. Comprendre et manipuler divers types d'équations, des linéaires aux quadratiques, nous permet de modéliser des situations financières complexes, d'analyser des tendances économiques, et de prise de décision. La capacité à résoudre et à interpréter des équations est cruciale pour les gestionnaires et les économistes qui cherchent à optimiser les ressources, prévoir les performances économiques, et formuler des stratégies efficaces.

Références

Comment citer ce cours ?

Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion, Jean-François Caulier, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

Table des illustrations