Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion

Étude de cas – Factorisation d'un trinôme du second degré

Ce cours vous est proposé par Jean-François Caulier, Maître de conférences, Paris-1Panthéon Sorbonne et par AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Cet exercice présente un cas d'usage classique de la factorisation d'un trinôme du second degré, qui est ici la méthode la plus efficace pour déterminer la production optimale d'une entreprise en fonction de ses capacités de production (« sa taille ») sans recourir à des méthodes plus sophistiquées telles que la dérivation.

Contexte

Analyse des coûts de production

Une entreprise de fabrication de lampes LED vous a fourni ses chiffres de coûts de production et vous demande de l'aider à déterminer le niveau de production efficace qui correspond à la taille de son usine de fabrication. Grâce à ces données, vous avez déterminé que la fonction de coût total de l'entreprise peut s'écrire $C(x) = 2x^3 - 16x^2 + 64x$ avec x la quantité en milliers de lampes LED fabriquées et$C(x)$ le coût total en milliers d'euros.

Consignes

Votre travail consiste maintenant à déterminer le volume de production qui minimise le coût moyen de production :

1. Déterminez la fonction de coût moyen,
2. Déterminez le discriminant (le Delta),
3. Utilisez la factorisation par complétion du carré,
4. Identifiez le volume efficace de production.

Corrigé : éléments de réponse

1. Si le coût total s'exprime par $C(x)$ alors le coût moyen se calcule en divisant $C(x)$ par x :

$$CM(x) = \frac{2x^3 - 16x^2 + 64x}{x} = 2x^2 - 16x + 64.$$

On note que x représente des quantités produites, on suppose donc $x > 0$.

2. **Calcul du Discriminant** :

$$\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 64 = 256 - 512 = -256.$$

Puisque le discriminant est négatif, il n'y a aucun niveau de production qui annule le coût moyen, celui-ci est donc toujours positif (ou toujours négatif, vérifiez !).

3. **Complétion du Carré** :

$$CM(x) = 2(x^2 - 8x + 32)$$
$$CM(x) = 2((x - 4)^2 + 16)$$
$$CM(x) = 2(x - 4)^2 + 32$$

Ceci montre que le coût est toujours en augmentation, atteignant son point le plus bas lorsque $x = 4$. Si $x = 4$, $CM(x) = 32 > 0$. Aussitôt que $x \neq 0$, on a $2(x - 4)^2 > 0$ qui s'ajoute à 32, augmentant le coût moyen.

4. Le point $x = 4$ (4000 lampes) est un point de minimum théorique pour les coûts moyens. Ce point représente le niveau de production le plus efficace en termes de coûts pour l'entreprise. Si l'entreprise souhaite à terme adopter un autre niveau de production, il sera pertinent de modifier ses capacités de production (« sa taille »).

Références

Comment citer ce cours ?

Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion, Jean-François Caulier, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).