Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion

Développement et factorisation – Factorisation d'un trinôme du second degré

Ce cours vous est proposé par Jean-François Caulier, Maître de conférences, Université Paris 1 Panthéon Sorbonne et par AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Table des matières

Préambule **2**

Introduction **2**

Conditions pour la factorisation **3**

Factorisation par les racines **3**

Factorisation par complétion du carré **4**

Références **7**

Préambule

Objectifs :

- Exploiter le théorème du facteur pour factoriser un trinôme du second degré.

Introduction

Un des objets mathématiques les plus étudiés au lycée est très certainement le trinôme du second degré et la découverte de ses racines grâce au fameux « Delta ». L'objectif de cette section est d'exploiter le résultat du théorème du facteur que nous avons présenté dans la section sur les polynômes pour offrir une expression factorisée de ce trinôme.

Pour rappel, un trinôme du second degré présente la forme générale suivante :

$$ax^2 + bc + c$$

Où a, b et c représentent les coefficients, des nombres réels tels que $a \neq 0$. Considéré comme une fonction dépendant de la variable x, cette expression est également connue sous le nom de **fonction quadratique** :

$$p(x) = ax^2 + bx + c.$$

Les racines de ce trinôme sont les éventuelles valeurs de x qui annulent ce trinôme, c'est-à-dire que ce sont des valeurs de x telles que $p(x) = 0$.

Selon le théorème du facteur, si un polynôme $p(x)$ a une racine r (c'est-à-dire si $p(r) = 0$), alors le binôme $(x - r)$ est un facteur de $p(x)$. Cela signifie que l'on peut écrire le polynôme $p(x)$ sous la forme :

$$p(x) = (x - r) \cdot q(x)$$

où $q(x)$ est un autre polynôme de degré inférieur à celui de $p(x)$.

L'objet des parties qui suivent est d'utiliser ce résultat pour factoriser le trinôme du second degré en produit de binômes.

Conditions pour la factorisation

Le discriminant est l'outil crucial qui va nous permettre de déterminer la nature des racines d'une équation quadratique, et par conséquent, la façon dont le trinôme peut être factorisé. Le discriminant est donné par la formule :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Cette formule permet de comprendre non seulement le nombre de solutions réelles de l'équation, mais aussi leur nature. Voici comment interpréter le discriminant :

1. **Si $\Delta > 0$** : L'équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$ possède deux solutions réelles et distinctes. Cela signifie que le trinôme peut être décomposé en deux binômes réels distincts. Par exemple, si $\Delta > 0$, un trinôme comme $x^2 - 5x + 6$ peut être factorisé en $(x - 2)(x - 3)$
2. **Si $\Delta = 0$:** L'équation quadratique a une solution réelle unique, souvent appelée racine double. Le trinôme peut alors être factorisé en un carré parfait, c'est-à-dire $(mx + n)^2$, où m et n sont des nombres réels. Par exemple, $x^2 - 4x + 4$ se factorise en $(x - 2)^2$.
3. **Si $\Delta < 0$:** L'équation a deux solutions complexes conjuguées, ce qui signifie que les racines ne sont pas des nombres réels. Dans ce cas, le trinôme ne peut pas être factorisé en utilisant uniquement des nombres réels. Un exemple serait $x^2 + x + 1$, qui ne peut pas être factorisé en expressions réelles simples.

Dans les deux premiers cas, le théorème des facteurs peut être employé puisqu'au moins une racine existe. Nous détaillons la procédure dans le point suivant.

Factorisation par les racines

La première étape est de calculer le Delta et de vérifier s'il est bien positif ou nul. Si c'est bien le cas, on peut alors trouver la valeur exacte des racines :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

avec $x_1 = x_2$ si $\Delta = 0$.

Par le théorème des facteurs, on sait alors $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)q(x)$ avec $q(x)$ un polynôme à déterminer. Or, $q(x)(x - x_1)(x - x_2) = q(x)[x^2 - (x_2 + x_1)x + x_1x_2]$ à comparer avec le résultat attendu qui est $ax^2 + bx + c = a[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}]$. Or, $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ et $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ (vérifiez-le !), donc $q(x) = a$.

Ainsi, si $\Delta \geq 0$, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemple

Considérons le trinôme du second degré suivant : $2x^2 + 4x - 6$.

- Calculons Δ : $\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 16 + 48 = 64$
- Les racines sont :

$$x_1, x_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{4} = \frac{-4 \pm 8}{4}$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = -3$$

- Nous pouvons maintenant en déduire l'expression factorisée suivante :

$$2x^2 + 4x - 6 = 2(x - 1)(x + 3).$$

Factorisation par complétion du carré

La technique de complétion du carré est une méthode efficace pour factoriser un trinôme du second degré qui repose sur la transformation d'un trinôme en un carré parfait, simplifiant ainsi la résolution ou la factorisation. Voyons comment appliquer cette technique étape par étape.

Étape 1 : Exprimer le trinôme sous une forme appropriée

Pour appliquer la méthode de complétion du carré, le coefficient du terme quadratique, a, doit être 1. Si $a \neq 1$, divisez tous les termes de l'équation par a :

$$ax^2 + bx + c = 0 \ \Rightarrow \ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Étape 2 : Isoler le terme constant

Pour faciliter la complétion du carré, isolez le terme constant c en le transférant de l'autre côté de l'équation :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Étape 3 : Ajouter et soustraire le terme nécessaire pour compléter le carré

Trouvez le terme qui complète le carré. Ce terme est toujours $\left(\frac{\text{coefficient de } x}{2}\right)^2$. Ajoutez et soustrayez ce terme du côté gauche de l'équation :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a}$$

Étape 4 : Reformuler l'équation sous Forme de carré parfait

Regroupez le trinôme complet du carré et simplifiez le reste :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}$$

Étape 5 : Résoudre pour x

Pour isoler x, commencez par réécrire l'équation pour isoler le carré parfait :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

Puis, prenez la racine carrée des deux côtés, en n'oubliant pas que cela donnera deux solutions, positive et négative :

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}$$

<u>Au final, la réécriture donne</u> :

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}\right)\right]=a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Exemple de Complétion du Carré

Considérons le trinôme $2x^2+4x-6$. Appliquons la méthode de complétion du carré :

1. Normalisation : $x^2+2x-3=0$
2. Isolation : $x^2+2x=3$
3. Complétion : $x^2+2x+1-1=3$
4. Carré parfait : $(x+1)^2-1=3$
5. Résoudre : $(x+1)^2=4$
6. Solutions : $x+1=\pm 2$, donc $x=1$ ou $x=-3$
7. Factorisation : $2(x-1)(x+3)$.

<u>Conclusion</u>

La méthode de complétion du carré vous permet de transformer un trinôme en une équation plus simple, facilitant ainsi la résolution et ensuite sa factorisation. Cette technique est particulièrement utile dans des contextes où vous devez résoudre des équations sans recourir à la formule quadratique ou lorsque vous traitez avec des expressions où le discriminant est nul, menant à une racine double.

Références

Comment citer ce cours ?

Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion, Jean-François Caulier, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).