Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion

Les polynômes

Ce cours vous est proposé par Jean-François Caulier, Maître de conférences, Université Paris 1 Panthéon Sorbonne et par AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Table des matières

Préambule

Objectifs :

- Reconnaître un polynôme,
- Maîtriser le vocabulaire des éléments qui composent un polynôme,
- Savoir exécuter les différentes opérations avec des polynômes,
- Connaître les grands théorèmes sur les polynômes.

Introduction

Les polynômes sont des expressions algébriques essentielles dans de nombreux domaines des mathématiques, allant de l'algèbre élémentaire à l'analyse de données et le machine learning. En économie, les polynômes représentent le degré de sophistication directement supérieur à celui de la relation linéaire dans la modélisation d'une relation entre deux variables, et sont donc très souvent employés.

Dans cet exposé, nous allons introduire les polynômes d'une seule variable x. Après avoir rappelé quelques concepts de base, nous en étudierons les propriétés et examinerons certaines techniques pour les manipuler.

Définitions

La forme générale d'un polynôme est la suivante :

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Cette forme se comprend bien si on examine l'étymologie du terme "polynôme", dérivé du grec ancien, et se compose des **deux parties : "poly-" et "-nôme"**.

1. *Poly-* : Cette racine signifie "plusieurs" ou "beaucoup". Elle est couramment utilisée pour indiquer une multitude ou une variété dans différents contextes (comme dans polyglotte, polyvalent, polyèdre, etc.).

2. *-nôme* : Ce suffixe vient du grec "nomos", qui signifie "part" ou "portion". Dans le contexte des polynômes, cela fait référence aux différents termes qui sont sommés dans l'expression.

Ainsi, "polynôme" signifie littéralement "plusieurs termes", et chaque terme est composé de plusieurs éléments, dont nous allons maintenant examiner la définition générale puis appliquée aux polynômes.

Une **constante** est un nombre fixe qui ne change pas. Dans les équations, les constantes représentent des valeurs fixes. En économie, le taux de TVA ou le nombre de jours dans une année sont des constantes. Dans un polynôme, chaque terme est composé d'un coefficient multiplicateur qui est une constante, elles sont notées a_i avec l'indice i qui varie en fonction de la position du terme dans la somme.

Une **variable** est une valeur, souvent représentée par une lettre comme x ou y, qui peut changer, c'est-à-dire prendre plusieurs valeurs différentes. En économie, une variable peut représenter des quantités susceptibles de changer, comme le prix d'un produit ou le revenu d'une population. Dans le polynôme, la variable est x et apparaît sous différentes puissantes selon la position dans la somme.

Un **paramètre** est similaire à une constante, mais il est utilisé pour définir des caractéristiques spécifiques dans une famille de modèles. Par exemple, dans la formule $ax^2 + bx + c$, les lettres a, b et c représentent des paramètres : leurs valeurs peuvent varier selon le contexte, l'exercice, … mais dans un contexte particulier, leurs valeurs sont constantes.

Un **terme** est une composante d'une expression algébrique, combinant des constantes et des variables. Par exemple, dans $7x, 7$ est une constante et x est une variable ; ensemble, ils forment un terme.

Un **polynôme** est une somme de plusieurs termes. Il peut être simple comme $x + 1$ ou complexe comme $4x^5 - 3x^3 + x - 9$. En économie, les polynômes peuvent représenter des fonctions de coût, de profit, ou de demande, reliant divers facteurs à des résultats économiques.

Un **monôme** est un polynôme constitué d'un seul terme. Par exemple, $3x^2$ est un monôme où 3 est la constante et x^2 est la variable élevée au carré.

Le **degré** d'un monôme est la somme des exposants de toutes les variables (lorsqu'il y en a plusieurs) dans ce monôme. Par exemple, dans $4x^3y^2$, le degré est $3 + 2 = 5$. Dans notre contexte, le degré d'un monôme d'une seule variable est la puissance à laquelle est élevée la variable x. Le degré d'un polynôme est le plus haut degré de ses monômes.

Un **binôme** est polynôme qui contient exactement deux termes. Par exemple, $x + 5$ et $3x^2 - 2x$ sont des binômes. Un **trinôme** est un polynôme avec trois termes. Le plus célèbre des exemples est le trinôme du second degré, que nous avons déjà rencontré dans la définition de paramètre, et qui fait l'objet d'une analyse approfondie au lycée.

Deux termes sont dits **semblables** si le seul élément qui les distinguent est la constante multiplicative (le coefficient). Par exemple, $12x^3$ et $-5x^3$ sont des termes semblables.

Pour un polynôme de la variable x, que l'on note synthétiquement $P(x)$, on appelle **racines** les valeurs de x telles que $P(x) = 0$. Par exemple, pour $ax^2 + bx + c$, les racines sont $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, pourvu que $b^2 - 4ac \geq 0$. Ce qui signifie que $a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) + c = 0$ et $a\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) + c = 0$.

Opérations sur les polynômes

Nous avons défini les différentes opérations possibles sur les nombres comme des moyens de combiner plusieurs nombres ensembles pour en obtenir un nouveau. Dans le cas des fractions, nous avons vu que certaines précautions devaient être prises si nous voulions également y appliquer certaines opérations. Dans cette section, nous allons définir différentes opérations de base possibles sur les polynômes et détailler les précautions particulières qui s'y appliquent.

Addition de polynômes

L'addition de deux polynômes se fait en additionnant les termes semblables, c'est-à-dire dans le cas des polynômes d'une seule variables des termes de même degré.

Exemple :

Soit $P(x) = 2x^2 + 3x + 5$ et $Q(x) = x^2 + 2x + 8$.

Pour additionner $P(x)$ et $Q(x)$, alignez les polynômes selon les degrés :

$$(2x^2 + 3x + 5) + (x^2 + 2x + 8) = (2x^2 + x^2) + (3x + 2x) + (5 + 8) = 3x^2 + 5x + 13$$

Soustraction de polynômes

La soustraction se fait de manière similaire à l'addition, sauf que les termes correspondants sont soustraits.

Exemple :

Soit $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + x + 7$ et $Q(x) = 2x^3 + x^2 + 4x + 2$.

La soustraction de $Q(x)$ de $P(x)$ est :

$$\begin{aligned}(5x^3 + 3x^2 + x + 7) - (2x^3 + x^2 + 4x + 2) &= (5x^3 - 2x^3) + (3x^2 - x^2) + (x - 4x) + (7 - 2) \\ &= 3\mathrm{x}^3 + 2x^2 - 3x + 5\end{aligned}$$

Multiplication de polynômes

Pour multiplier deux polynômes, on utilise la distributivité. Chaque terme du premier polynôme doit être multiplié par chaque terme du deuxième polynôme, et ensuite, les termes similaires sont combinés.

Exemple :

Soit $P(x) = x + 3$ et $Q(x) = 2x^2 + x + 1$.

La multiplication de $P(x)$ par $Q(x)$ donne :

$$(x + 3)(2x^2 + x + 1) = x \cdot 2x^2 + x \cdot x + x \cdot 1 + 3 \cdot 2x^2 + 3 \cdot x + 3 \cdot 1 = 2x^3 + x^2 + x + 6x.$$

Division de polynômes

La division de polynômes est plus complexe et ne sera donc pas détaillée ici. Elle est souvent effectuée par la méthode de division longue ou synthétique lorsque le diviseur est de degré inférieur au dividende.

Exemple :

Soit $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 2$ et $Q(x) = x - 1$. La division de $P(x)$ par $Q(x)$ par la division longue donne :

Le quotient est $x^2 + 3x - 2$ et le reste est 0, signifiant que $Q(x)$ divise exactement $P(x)$.

Théorèmes importants

Plusieurs théorèmes remarquables concernant les polynômes sont utiles à connaître car leurs résultats seront ensuite utilisés par exemple lors de la factorisation ou encore dans la levée d'indétermination de calculs de limites.

Théorème du facteur

Ce théorème est connu aussi sous le nom de la racine et du facteur.

Il établit un lien entre les racines d'un polynôme et ses facteurs. Selon ce théorème, si un polynôme $p(x)$ a une racine r, alors le binôme $(x-r)$ est un facteur de $p(x)$. Cela signifie que l'on peut écrire le polynôme $p(x)$ sous la forme :

$$p(x) = (x-r) \cdot q(x)$$

où $q(x)$ est un autre polynôme.

Par exemple, 2 est racine du polynôme $p(x) = x^2 - 5x + 6$. Grâce au théorème, on sait que ce polynôme peut s'exprimer comme $p(x) = (x-2)q(x)$ où $q(x)$ est un polynôme de degré inférieur à celui de $p(x)$. On peut facilement déterminer ici que $q(x) = (x-3)$.
Ce théorème est particulièrement utile pour factoriser des polynômes et pour trouver leurs racines. Il est souvent utilisé en conjonction avec d'autres méthodes de factorisation, comme la méthode d'identification ou la méthode de décomposition en produit de facteurs, que nous verrons plus tard.

Théorème de Viète

Le théorème de Viète, nommé d'après le mathématicien français François Viète, fournit des relations remarquables entre les coefficients d'un polynôme et les sommes et produits de ses racines. Ce théorème est particulièrement utile pour résoudre et comprendre les équations polynomiales sans avoir à les résoudre explicitement.

Pour un polynôme de degré n :

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

où $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ sont des coefficients réels ou complexes, et $a_n \neq 0$, si les racines de ce polynôme sont $r_1, r_2, \ldots, r_n$, alors les relations suivantes, connues sous le nom de relations de Viète, s'établissent entre les racines et les coefficients :

1. La somme des racines prises une à une est égale à $-a_{n-1}/a_n$.
2. La somme des produits des racines prises deux à deux est égale à a_{n-2}/a_n.
3. La somme des produits des racines prises trois à trois est égale à $-a_{n-3}/a_n$, et ainsi de suite.
4. Le produit de toutes les racines est $(-1)^n a_0/a_n$ si n est le degré du polynôme.

Exemple pour un polynôme du second degré :

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

Avec les racines r_1 et r_2. D'après le théorème de Viète :

- La somme des racines $r_1 + r_2$ est égale à $-b/a$.
- Le produit des racines $r_1 \times r_2$ est égal à c/a.

Le théorème de Viète est très pratique pour vérifier les racines d'une équation sans les calculer explicitement. Il est aussi utile pour construire des équations ayant des racines spécifiques. Par exemple, si vous savez que vous voulez un polynôme quadratique dont les racines ont une somme de 10 et un produit de 16, vous pouvez immédiatement écrire le polynôme comme $x^2 - 10x + 16 = 0$.

Exemple : soit e polynôme

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Les coefficients sont $a_2 = 1, a_1 = -5$, et $a_0 = 6$. Le théorème de Viète nous dit que :

La somme des racines (ici $r_1 + r_2$) doit être égale à $-\frac{a_1}{a_2} = -\frac{-5}{1} = 5$.

Le produit des racines (ici $r_1 \times r_2$) doit être $\frac{a_0}{a_2} = \frac{6}{1} = 6$.

En sachant que les racines sont $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$, nous pouvons vérifier que :

$$r_1 + r_2 = 2 + 3 = 5$$

$$r_1 \times r_2 = 2 \times 3 = 6.$$

Théorème fondamental de l'algèbre

Le théorème fondamental de l'algèbre est un résultat fondamental en mathématiques, qui peut être énoncé comme suit :

Chaque polynôme non constant de degré n avec des coefficients réels a au plus n racines dans réelles, en comptant les racines avec leurs multiplicités[1].

Ce théorème a une conséquence importante en matière de factorisation d'un polynôme : Tout polynôme non constant $p(x)$ de degré n avec des coefficients réels peut être factorisé en un produit de facteurs linéaires : $p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$ où $r_1, r_2, \dots, r_n$ sont les racines du polynôme (avec leurs multiplicités).

Le théorème fondamental de l'algèbre est un résultat profond et fondamental en algèbre et en analyse complexe.

Application économique

Nous allons maintenant explorer un cas d'utilisation de polynôme dans un exercice-type de microéconomie de maximisation du profit de l'entreprise en analysant et en optimisant ses fonctions de recette et de coût.

Prenons l'exemple d'une petite entreprise qui produit et vend un seul type de produit. Nous détaillerons les étapes permettant de trouver le niveau de production qui maximise le profit.

Fonction de Demande

Supposons que la fonction de demande soit linéaire, ce qui est courant dans de nombreux scénarios économiques. Pour notre produit, la fonction de demande est donnée par :

$$p(x) = 300 - 10x$$

où x est le nombre d'unités vendues et $p(x)$ est le prix de vente par unité. Le prix commence à 300€ et diminue de 10€ pour chaque unité supplémentaire vendue, ce qui reflète une baisse de prix pour augmenter la quantité vendue.

[1] Le théorème affirme un peu plus en considérant les nombres complexes : Chaque polynôme non constant de degré n avec des coefficients complexes a exactement n racines dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, en comptant les racines avec leurs multiplicités.

Fonction de Recette Totale

La recette totale $R(x)$ est le produit du prix par la quantité vendue :

$$R(x) = x \times p(x) = x(300 - 10x) = 300x - 10x^2$$

Cette fonction représente la recette totale en fonction du nombre d'unités vendues.

Fonction de Coût Total

Le coût total $C(x)$ inclut à la fois un coût fixe et un coût variable qui est proportionnel au nombre d'unités produites :

$$C(x) = 1000 + 50x$$

où 1000€ est le coût fixe (coûts tels que le loyer, salaires fixes, etc.) et 50€ est le coût variable par unité produite (coûts de matériaux, énergie, etc.).

Fonction de Profit

Le profit $P(x)$ est calculé comme la différence entre la recette totale et le coût total :

$$P(x) = R(x) - C(x) = (300x - 10x^2) - (1000 + 50x)$$
$$P(x) = 250x - 10x^2 - 1000$$

Cette fonction est un trinôme du second degré et prend la forme d'une parabole tournée vers le bas, indiquant que la fonction atteint un maximum.

Maximisation du Profit

Pour maximiser le profit, nous devons trouver le sommet de la parabole, qui se trouve à mi-chemin entre ses racines. Les racines de $P(x)$ sont les valeurs de x pour lesquelles $P(x) = 0$. En résolvant cette équation, nous trouvons $x_1 = 5$ et $x_2 = 20$. Le maximum se situe à $x_{\max} = \frac{x_1+x_2}{2} = 12{,}5$.

En substituant $x = 12{,}5$ dans la fonction de profit, nous calculons le profit maximal :

$$P(12{,}5) = 250(12{,}5) - 10(12{,}5)^2 - 1000$$
$$P(12{,}5) = 3125 - 1562{,}5 - 1000$$
$$P(12{,}5) = 562{,}5$$

Ainsi, le profit maximal que l'entreprise peut atteindre avec cette structure de coûts et de demande est de 562,5€, en produisant et en vendant 12,5 unités.

Cette analyse montre comment l'utilisation de fonctions mathématiques peut aider les entreprises à prendre des décisions stratégiques basées sur des données quantitatives. La compréhension de la relation entre les coûts, les recettes et le volume de production est cruciale pour maximiser le profit.

Conclusion

En conclusion, ce chapitre sur les polynômes nous a permis d'explorer des concepts fondamentaux et des outils essentiels en algèbre. Nous avons commencé par introduire les définitions de base, telles que les constantes, les variables, les paramètres, les termes, les monômes, les binômes et les polynômes. Nous avons également étudié les opérations de base avec les polynômes, comme l'addition, la soustraction et la multiplication, qui sont essentielles pour manipuler et résoudre des problèmes impliquant des polynômes.

Nous avons ensuite abordé trois théorèmes importants : le théorème du facteur, le théorème de Viète et le théorème fondamental de l'algèbre. Ces théorèmes nous ont fourni des relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme, ainsi que des propriétés fondamentales des polynômes, qui sont utiles pour résoudre des équations polynomiales et factoriser des polynômes.

Enfin, nous avons illustré l'importance des polynômes en les appliquant à un contexte économique. Les polynômes peuvent être utilisés pour modéliser des situations économiques, telles que la demande, l'offre, les coûts et les revenus, et pour analyser les relations entre ces variables.

Cette partie constitue une base solide pour les études ultérieures en algèbre, en analyse et en économie. Les compétences et les connaissances acquises ici seront précieuses pour résoudre des problèmes plus complexes et pour comprendre des concepts plus avancés dans ces domaines.

Annexe : le symbole Σ

Le symbole sigma majuscule (Σ), issu de l'alphabet grec, est couramment utilisé pour représenter de manière compacte la somme d'une série de termes. Ce symbole permet de simplifier et de condenser l'écriture des sommes, surtout quand il y a un grand nombre de termes à additionner.

Voici comment le symbole sigma est généralement utilisé :

$$\sum_{i=a}^{b} f(i)$$

- Σ : C'est le symbole utilisé pour indiquer qu'une somme est réalisée.
- $i = a$: Cela indique la valeur de départ de l'indice i, un entier naturel, et a est la première valeur pour laquelle la fonction $f(i)$ est évaluée.
- b : C'est la valeur finale de l'indice. La somme sera calculée jusqu'à ce que i atteigne b.
- $f(i)$: C'est une fonction des indices i. Pour chaque valeur de i de a à $b, f(i)$ est calculé et ajouté à la somme.

Exemple : Supposons que nous devons calculer la somme des premiers 5 nombres entiers. On peut écrire cela avec le symbole sigma comme suit :

$$\sum_{i=1}^{5} i$$

Cela signifie que nous commençons avec $i = 1$ et terminons avec $i = 5$, en sommant les valeurs de i. Calculons cette somme pas à pas :

- Quand $i = 1, f(i) = 1$
- Quand $i = 2, f(i) = 2$
- Quand $i = 3, f(i) = 3$
- Quand $i = 4, f(i) = 4$
- Quand $i = 5, f(i) = 5$

Donc, la somme est $\sum_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$.

Imaginons maintenant que nous voulons sommer les carrés des trois premiers nombres entiers positifs. Nous utiliserons la fonction $f(i) = i^2$, donc notre expression sigma devient :

$$\sum_{i=1}^{3} i^2$$

Calculons chaque terme séparément :

- $1^2 = 1$
- $2^2 = 4$

- $3^2 = 9$

La somme développée donne $\sum_{i=1}^{3} i^2 = 1 + 4 + 9$.

Pour écrire un polynôme à l'aide du symbole sigma (Σ), pour un polynôme de degré n de la variable x :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Dans cette expression :

- $\sum$ est le symbole de sommation, indiquant qu'on additionne les termes qui suivent.
- k est l'indice de sommation, qui commence ici à 0 et se termine à n, le degré du polynôme.
- a_k représente les coefficients du polynôme, qui peuvent être des nombres réels ou complexes.
- x^k est la variable x élevée à la puissance k.

Chaque terme $a_k x^k$ représente un monôme du polynôme, et en les sommant tous, on obtient le polynôme complet.

Par exemple, si on a un polynôme degré 3, on pourrait l'écrire :

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Et en utilisant le symbole sigma :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{3} a_k x^k.$$

Références

Comment citer ce cours ?

Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion, Jean-François Caulier, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).