Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion

Les fondamentaux – Les puissances

Ce cours vous est proposé par Jean-François Caulier, Maître de conférences, Université Paris 1 Panthéon Sorbonne et par AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Table des matières

Préambule

Objectifs :

- Comprendre l'origine de la définition de puissance,
- Connaître les différents types de puissances,
- Maîtriser leurs propriétés,
- L'appliquer au calcul financier d'intérêts composés.

Introduction

Les puissances sont un outil mathématique essentiel qui simplifie l'écriture des produits répétés d'un même facteur. Dans cette partie, nous allons définir les puissances, examiner les règles et propriétés qui les régissent, et explorer leur utilisation dans des exemples concrets. Parmi ces propriétés figurent le produit et le quotient de puissances de même base, la puissance d'un produit ou d'un quotient, ainsi que la puissance d'une puissance.

Nous verrons également comment les puissances jouent un rôle crucial en finance, notamment dans le calcul des intérêts composés, où le capital initial est multiplié par un facteur exponentiel pour tenir compte de la croissance des intérêts. Maîtriser ces notions est essentiel en économie et gestion pour comprendre la croissance des investissements, l'accumulation des intérêts, et plus généralement la planification financière.

Définition

La puissance d'un nombre est une manière d'exprimer un produit répété du même facteur. Si a est un nombre réel, la puissance a^n (où n est un entier naturel) se définit comme :

$$a^n = a \times a \times a \times \cdots \times a \text{ (n facteurs)}$$

Exemple :

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16.$$

Le nombre a, qui peut être choisi librement, est la **base**, et le nombre n est **l'exposant**, un entier, qui indique combien de fois la base est multipliée par elle-même.

Puissances avec Exposant Entier

Exposant Positif

Si n est un entier positif ($n \geq 1$), alors a^n se définit en multipliant a par lui-même n fois :

$$a^n = a \times a \times a \times \cdots \times a \quad \text{(n facteurs)}$$

Exemples :

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$
$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$

Exposant Nul

Si $n = 0$ et que $a \neq 0$, alors a^0 est défini comme égal à 1 :

$$a^0 = 1$$

Exemples :

$$7^0 = 1$$
$$(2+3)^0 = 1$$

Remarque

0^0 est considéré comme indéterminé.

Exposant Négatif

Si n est un entier négatif ($n < 0$), alors a^n se définit comme l'inverse de a^{-n} :

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

Exemples :

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$
$$3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

Moyen mnémotechnique

Il existe une manière de retenir comment traiter les exposants négatifs et positifs : lorsqu'ils changent d'étage, ils changent de signe !

En règle général, on conseille de ne travailler qu'avec des exposants positifs, dont la manipulation est plus naturelle. Pour le dire autrement, avant de procéder à des calculs ou simplifications, on change d'étage[1] tous les exposants négatifs.

Puissances avec Exposant Rationnel

Lorsqu'un exposant est une fraction $\frac{m}{n}$ (où m et n sont des entiers et $n \neq 0$), la puissance s'exprime en utilisant une racine :

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Exemples :

$$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$$
$$16^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$$

Propriétés des Puissances

1. **Produit de Puissances de Même Base** : lorsque les bases sont identiques, on additionne simplement les exposants.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

[1] Si la fraction existe, on passe au dénominateur les exposants négatifs du numérateur, et au numérateur les exposants négatifs du dénominateur. S'il n'y a pas de fraction, on utilise la définition en utilisant l'inverse.

Exemple :

$$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$$

2. **Quotient de Puissances de Même Base** : on soustrait les exposants lorsque les bases sont identiques.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \ (a \neq 0)$$

Exemple :

$$\frac{5^7}{5^3} = 5^{7-3} = 5^4 = 625$$

3. **Puissance d'une Puissance** : lorsqu'une puissance est élevée à une autre puissance, on multiplie les exposants.

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

Exemple :

$$(3^2)^4 = 3^{2 \times 4} = 3^8 = 6561$$

4. **Puissance d'un Produit** : la puissance d'un produit consiste à élever chaque facteur à la puissance donnée. On distribue l'exposant à chacun des facteurs.

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

Exemple :

$$(2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3 = 8 \times 125 = 1000$$

5. **Puissance d'un Quotient** : la puissance d'un quotient revient à élever chaque partie (numérateur et dénominateur) à la puissance donnée.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \ (b \neq 0)$$

Exemple :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$

Utilisation des Puissances en Finance

L'intérêt composé est une méthode de calcul des intérêts sur un capital initial, où les intérêts accumulés à chaque période s'ajoutent au capital initialement placé pour produire de nouveaux intérêts. En d'autres termes, on calcule les intérêts sur les intérêts déjà gagnés.

Formule Générale :

Si S_0 est le capital initial, r est le taux d'intérêt par période (exprimé sous forme décimale), et n est le nombre de périodes, alors le capital final S_n est donné par :

$$S_n = S_0 \times (1 + r)^n$$

La puissance $(1 + r)^n$ représente le facteur multiplicatif appliqué au capital initial pour obtenir le capital final. La présence de l'exposant n montre que chaque période successive ajoute des intérêts sur les intérêts déjà accumulés.

Exemple : intérêt Composé sur 5 Ans

Supposons que vous placez une somme initiale $S_0 = 100$ euros à un taux d'intérêt annuel de 3% $(r = 0{,}03)$ pendant $n = 5$ ans.

Calculons le capital final :

$$S_n = 100 \times 1{,}1592740743 = 115{,}927 \text{ euros}$$

Décomposition de l'Accroissement Annuel :

- Année 1 :

$$S_1 = 100 \times 1{,}03 = 103 \text{ euros}$$

- Année 2 :

$$S_2 = 103 \times 1{,}03 = 106{,}09 \text{ euros}$$

- Année 3 :

$$S_3 = 106{,}09 \times 1{,}03 = 109{,}2727 \text{ euros}$$

- Année 4 :

$$S_4 = 109{,}2727 \times 1{,}03 = 112{,}551 \text{ euros}$$

- Année 5 :

$$S_5 = 112{,}551 \times 1{,}03 = 115{,}927 \text{ euros}$$

L'utilisation de la formule générale nous évite ainsi ces calculs répétés pour obtenir le montant final.

Conclusion

Les puissances permettent d'exprimer des produits répétés et simplifient les calculs. En maîtrisant les propriétés et les règles des puissances, vous pourrez résoudre des problèmes mathématiques plus complexes et effectuer des calculs en toute confiance. Leur maîtrise est fondamentale en finance comme l'exemple du calcul des intérêts composés nous l'a montré.

Références

Comment citer ce cours ?