Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion

Les fondamentaux – Les fractions

Ce cours vous est proposé par Jean-François Caulier, Maître de conférences, Université Paris 1 Panthéon Sorbonne et par AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Table des matières

Préambule

Objectifs :

- Connaître les types de fractions,
- Savoir les manipuler à travers les opérations de base.

Introduction

Les fractions représentent sans doute la première rencontre de difficultés nouvelles nécessitant de faire preuve de rigueur dans un cursus de mathématiques. En effet, il ne faut pas diviser par zéro, on ne peut additionner n'importe quelle fraction à une autre sans travail préalable, il faut que leurs dénominateurs soient identiques. Enfin, on ne simplifie pas n'importe comment une fraction, il y a des règles à respecter !

Comprendre les différents types de fractions (propres, impropres, mixtes) et maîtriser les opérations fondamentales avec elles est essentiel pour progresser en mathématiques. Cette partie vise à clarifier ces concepts et à donner des bases solides pour manipuler les fractions efficacement.

Définition

Une fraction est un nombre qui représente une ou plusieurs parties égales d'un tout. Elle s'écrit sous la forme $\frac{a}{b}$, où :

- a est le numérateur (la partie supérieure de la fraction). Il indique le nombre de parties prises ;
- b est le dénominateur (la partie inférieure de la fraction) et doit être différent de zéro. Il indique en combien de parties le tout est divisé.

Une fraction peut s'écrire de manière **décimale** en calculant $a \div b$. La représentation décimale d'une fraction peut être finie ou infinie :

- **Décimale finie** :

  Lorsque la division du numérateur par le dénominateur donne un quotient fini. Exemple : $\frac{1}{4} = 0.25$.

- **Décimale infinie périodique** :
  Lorsque la division du numérateur par le dénominateur donne un quotient infini qui se répète selon un motif régulier.
  Exemple : $\frac{1}{3} = 0{,}333 \ldots.$

- **Décimale infinie Non-Périodique** :
  Lorsque la division du numérateur par le dénominateur donne un quotient infini sans motif répétitif (cas des nombres irrationnels). Si a et b sont deux nombres entiers, alors il est impossible d'obtenir une représentation décimale infinie non périodique.
  Exemple : $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}70710678118 \ldots.$

Point d'attention

Par souci d'exhaustivité, nous avons ajouté le cas de la représentation décimale infinie non périodique. En effet, vous serez certainement amenés en économie et gestion à rencontrer des fractions impliquant des nombres irrationnels. Cette motivation ne fait donc prendre un chemin différent de celui habituellement suivi dans les manuels de mathématiques où les fractions sont supposées impliquer des entiers uniquement, écartant la possibilité donc de rencontrer des développements infinis non périodiques.

Types de fractions

Lorsque l'on travaille avec les fractions, il est important de distinguer les différents types afin de les manipuler correctement. On distingue principalement les fractions propres, impropres et mixtes.

Cette section va explorer ces différents types de fractions, expliquer leurs caractéristiques et montrer comment les convertir et les manipuler.

Fraction propre

Une fraction est dite propre si le numérateur est strictement inférieur au dénominateur ($|a| < |b|$).
Exemples :

$$\frac{3}{7}, \frac{-5}{8}$$

Fraction impropre

Une fraction est dite impropre si le numérateur est supérieur ou égal au dénominateur ($|a| \geq |b|$).

Exemples :

$$\frac{5}{3}, \frac{-7}{4}, \frac{8}{8}$$

Fraction mixte

Une fraction mixte est une combinaison d'un entier et d'une fraction propre. Elle représente la somme d'un entier et d'une fraction propre.

Conversion d'une fraction impropre en fraction mixte :
Pour convertir une fraction impropre en fraction mixte, divisez le numérateur par le dénominateur. Le quotient donne la partie entière et le reste donne le numérateur de la fraction propre.

Exemple :
Convertir $\frac{7}{3}$ en fraction mixte.

1. Diviser 7 par 3 : quotient $= 2$, reste $= 1$.
2. La fraction mixte est donc $2\frac{1}{3}$.

Autres Exemples :

1. $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$
2. $\frac{-10}{3} = -3\frac{1}{3}$.

Simplification des fractions

La simplification des fractions est une étape essentielle pour travailler efficacement avec elles. Simplifier une fraction revient à trouver une fraction équivalente, mais avec un numérateur et un dénominateur plus petit. Pour cela, il est crucial de comprendre les notions de nombres premiers, de nombres composés, et d'utiliser la décomposition en facteurs premiers.

Définitions

- **Nombre Premier** :
  Un nombre premier est un entier naturel supérieur à 1 qui n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même.
  Les premiers nombres premiers :
  $2,3,5,7,11,13,17,\ldots$

- **Nombre composé** :
  Un nombre composé est un entier naturel qui possède plus de deux diviseurs.
  Exemples de nombres composés :

$$4,6,8,9,10,12,14,\ldots$$

Méthode de la Décomposition en Facteurs Premiers

La méthode de la décomposition en facteurs premiers permet de réduire une fraction en ses termes les plus simples. Voici les différentes étapes à suivre :

1. **Décomposer le numérateur et le dénominateur en facteurs premiers** : cela revient à exprimer chaque nombre sous forme d'un produit de nombres premiers.

2. **Identifier les facteurs communs** : trouver les facteurs premiers présents à la fois dans le numérateur et dans le dénominateur.

3. **Simplifier la Fraction** : diviser le numérateur et le dénominateur par le produit des facteurs communs pour obtenir la fraction simplifiée.

Exemple :

Simplifier la fraction $\frac{42}{56}$.

1. **Décomposition en Facteurs Premiers** :

- Numérateur 42 :

$$42 = 2 \times 3 \times 7$$

- Dénominateur 56 :

$$56 = 2^3 \times 7$$

2. **Identifier les facteurs communs** : les facteurs communs entre 42 et 56 sont 2 et
3. **Simplifier la fraction** : divisons le numérateur et le dénominateur par $2 \times 7 = 14$

$$\frac{42}{56} = \frac{2 \times 3 \times 7}{2^3 \times 7} = \frac{3}{4}$$

Conclusion :

La fraction $\frac{42}{56}$ peut être simplifiée en $\frac{3}{4}$ en utilisant la méthode de décomposition en facteurs premiers.

PGCD et PPCM

La méthode de la décomposition en facteurs premiers permet également de trouver facilement le plus grand commun diviseur (PGCD) et le plus petit commun multiple (PPCM) de deux nombres.

Plus Grand Commun Diviseur (PGCD)

Le PGCD de deux nombres est le plus grand nombre qui divise exactement les deux nombres.

Méthode :

1. Décomposer en facteurs premiers les deux nombres.
2. Identifier les facteurs communs entre les deux décompositions.
3. Prendre les puissances minimales de chaque facteur commun.
4. Calculer le produit des puissances minimales.

Exemple :

Trouvons le PGCD de 42 et 56.

1. **Décomposition en facteurs premiers :**

- $42 = 2 \times 3 \times 7$
- $56 = 2^3 \times 7$

2. **Identifier les facteurs communs :**

- 2 et 7

3. **Prendre les puissances minimales :**

- Pour 2, puissance minimale $= 1$
- Pour 7, puissance minimale $= 1$

4. **Calculer le produit :**

$$PGCD(42,56) = 2^1 \times 7^1 = 14.$$

Plus Petit Commun Multiple (PPCM)

Le PPCM de deux nombres est le plus petit nombre qui est un multiple des deux nombres.

Méthode :

1. Décomposer en facteurs premiers les deux nombres.
2. Prendre les puissances maximales de chaque facteur trouvé dans les décompositions.
3. Calculer le produit des puissances maximales.

Exemple : :

Trouvons le PPCM de 42 et 56.

1. **Décomposition en facteurs premiers :**

- $42 = 2 \times 3 \times 7$
- $56 = 2^3 \times 7$

2. **Prendre les puissances maximales :**

- Pour 2, puissance maximale = 3
- Pour 3, puissance maximale = 1
- Pour 7, puissance maximale = 1

3. **Calculer le produit :**

$$\text{PPCM}\ (42{,}56) = 2^3 \times 3^1 \times 7^1 = 168.$$

Opérations avec les fractions

Travailler avec les fractions implique de maîtriser différentes opérations comme l'addition, la soustraction, la multiplication et la division.

Addition et Soustraction

Pour additionner ou soustraire des fractions, il faut d'abord s'assurer que les dénominateurs sont identiques. Si ce n'est pas le cas, trouvez un dénominateur commun avant de procéder.

Méthode :

1. **Trouver un dénominateur commun :**

Le dénominateur commun est généralement le PPCM (Plus Petit Commun Multiple) des dénominateurs.

2. **Adapter les numérateurs :**

Multipliez chaque numérateur par le facteur correspondant au dénominateur commun.

3. Effectuer l'opération :

Additionnez ou soustrayez les numérateurs, en gardant le dénominateur commun.

4. Simplifier la fraction :

Divisez le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.

Exemple :

Calculons $\frac{2}{5} + \frac{3}{4}$.

1. **Trouver un dénominateur commun :**

Le PPCM de 5 et 4 est 20.

2. **Adapter les numérateurs :**

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{8}{20}$$
$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}$$

3. **Effectuer l'opération :**

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{8}{20} + \frac{15}{20} = \frac{23}{20}$$

4. **Simplifier la fraction :**

Ici, $\frac{23}{20}$ est une fraction impropre et peut être convertie en fraction mixte :

$$\frac{23}{20} = 1\frac{3}{20}.$$

Multiplication

Multiplier des fractions est plus simple, car il n'est pas nécessaire de trouver un dénominateur commun.

Méthode :

1. Multipliez les numérateurs des fractions entre eux.
2. Multiplier les dénominateurs des fractions entre eux.
3. Simplifier la fraction : divisez le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.

Exemple :

Calculons $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6}$.

1. **Multiplier les numérateurs :**

$$3 \times 5 = 15$$

2. **Multiplier les dénominateurs :**

$$4 \times 6 = 24$$

3. **Simplifier la fraction :**

Trouvons le PGCD de 15 et 24.

$$PGCD(15{,}24) = 3$$

Divisons le numérateur et le dénominateur par 3 :

$$\frac{15}{24} = \frac{15 \div 3}{24 \div 3} = \frac{5}{8}$$

Division

Diviser des fractions revient à multiplier par l'inverse de la fraction.

Méthode :

1. **Trouver l'inverse de la deuxième fraction** : Inverser le numérateur et le dénominateur de la deuxième fraction.
2. **Multiplier les fractions** : suivez les étapes de la multiplication des fractions.
3. **Simplifier la fraction** : divisez le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.

Exemple : :

Calculons $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$.

1. **Trouver l'inverse de la deuxième fraction :**

$$\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{5}{4}$$

2. **Multiplier les fractions :**

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{2 \times 5}{3 \times 4} = \frac{10}{12}$$

3. **Simplifier la fraction :**

Trouvons le PGCD de 10 et 12.

$$\text{PGCD}\ (10{,}12) = 2$$

Divisons le numérateur et le dénominateur par 2 :

$$\frac{10}{12} = \frac{10 \div 2}{12 \div 2} = \frac{5}{6}.$$

Conclusion

La manipulation correcte des fractions est un élément clé des mathématiques fondamentales, car elle établit les bases pour des concepts plus avancés en algèbre, en calcul et dans d'autres domaines. Dans ce chapitre, nous avons commencé par définir les fractions, en expliquant leur structure et leurs types, y compris les fractions propres, impropres et mixtes. Nous avons également abordé la simplification des fractions en utilisant la méthode de décomposition en facteurs premiers, ce qui nous a permis de trouver le PGCD et le PPCM. Ces outils nous ont aidés à comprendre comment réduire les fractions et à déterminer des dénominateurs communs.

Ensuite, nous avons exploré les opérations de base impliquant les fractions : addition, soustraction, multiplication et division. Nous avons démontré que l'addition et la soustraction nécessitent un dénominateur commun, tandis que la multiplication et la division sont plus simples. Enfin, nous avons illustré chaque opération par des exemples concrets pour renforcer la compréhension. Maîtriser ces concepts permet de manipuler efficacement les fractions et constitue une compétence essentielle pour progresser en mathématiques.

Références

Comment citer ce cours ?

Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion, Jean-François Caulier, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).