Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion

Les fondamentaux – La valeur absolue

Ce cours vous est proposé par Jean-François Caulier, Maître de conférences, Université Paris 1 Panthéon Sorbonne et par AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Table des matières

Préambule

Objectifs :

- Définir précisément la notion de valeur absolue
- Comprendre ses propriétés fondamentales, dont l'inégalité triangulaire
- Reconnaître quand c'est possible son interprétation comme distance

Introduction

La valeur absolue d'un nombre réel est souvent présentée en premier abord comme le nombre indiqué sans tenir compte de son signe « moins » s'il en a un. C'est-à-dire que la valeur absolue de 2, notée $|2|$, c'est 2, et la valeur absolue de (-2) aussi ! Si cette définition peut s'avérer satisfaisante dans un premier temps, elle montre très vite ses limites lorsqu'il s'agit de développer la valeur absolue d'une expression et non plus uniquement d'une valeur numérique. L'objet de cette section est de présenter la valeur absolue comme distance dans $\mathbb{R}$.

Définition

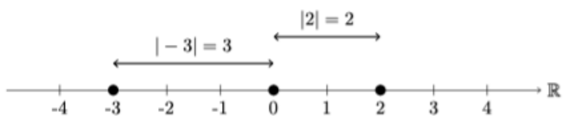
La valeur absolue d'un nombre réel x, notée $|x|$, représente la distance entre x et 0 sur la droite des réels.

Mathématiquement, on définit la valeur absolue de la sorte :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Pour comprendre l'interprétation graphique de la valeur absolue d'un nombre x comme la distance entre x et 0 sur la droite des réels, représentons les valeurs absolues $|-3|$ et $|2|$ pour exemple.

Figure 1 : interprétation graphique de la valeur absolue



Puisque le nombre 2 se situe à deux unités de distance de l'origine 0, sa valeur absolue est 2. Le point (-3) est à 3 unités de distance de l'origine, sa valeur absolue vaut 3.

Propriétés

La valeur absolue possède plusieurs propriétés fondamentales que nous allons maintenant détailler.

Positivité

Pour tout $x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$. La valeur absolue est toujours une valeur positive ou nulle.

Preuve :
La définition de la valeur absolue est :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Dans les deux cas, $|x| \geq 0$ parce que :

- Si $x \geq 0$, alors $|x| = x \geq 0$.
- Si $x < 0$, alors $|x| = -x \geq 0$, puisque $-x$ est positif.

L'interprétation géométrique de la valeur absolue comme distance explique bien la propriété de positivité. En effet, que vous avanciez ou que vous reculiez, vous effectuez toujours une distance positive.

Identité à zéro

La valeur absolue d'un nombre est nulle si et seulement si ce nombre est égal à zéro :

$$|x| = 0 \text{ si et seulement si } x = 0.$$

Preuve :

- $\Rightarrow$ Si $|x| = 0$, alors, par définition :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Si $x \geq 0$, alors $x = 0$.

Si $x < 0$, alors $-x = 0$, donc $x = 0$.

- $\Leftarrow$ Si $x = 0$, alors :

$$|x| = |0| = 0.$$

Multiplicativité

La valeur absolue du produit de deux nombres est égale au produit des valeurs absolues de ces deux nombres :
Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Preuve :
Examinons différents cas selon les signes de x et y :

- Cas $1 : x \geq 0$ et $y \geq 0$

$$|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$$

- Cas $2 : x \geq 0$ et $y < 0$

$$|x \cdot y| = |x \cdot (-y)| = x \cdot (-y) = |x| \cdot |-y| = |x| \cdot |y|$$

- Cas $3 :$ $x < 0$ et $y \geq 0$

$$|x \cdot y| = |(-x) \cdot y| = (-x) \cdot y = |-x| \cdot |y| = |x| \cdot |y|$$

- Cas $4 : x < 0$ et $y < 0$

$$|x \cdot y| = |(-x) \cdot (-y)| = (-x) \cdot (-y) = |-x| \cdot |-y| = |x| \cdot |y|$$

Cette démonstration est intéressante car elle repose sur l'examen de plusieurs possibilités tour à tour, ce qui est souvent nécessaire lorsqu'on manipule des valeurs absolues.

Subadditivité (inégalité triangulaire)

C'est la propriété la plus célèbre de la valeur absolue ! La valeur absolue de la somme de deux nombres est inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues de ces deux nombres. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Preuve :
La preuve repose sur l'inégalité triangulaire pour les réels. Par définition :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad |y| = \begin{cases} y & \text{si } y \geq 0 \\ -y & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

<u>Considérons les différents cas</u> :

- **Cas 1** : $x \geq 0$ et $y \geq 0$

$$|x+y| = x+y = |x|+|y|$$

- **Cas 2** : $x \geq 0$ et $y < 0$

$$|x+y| = |x-|y|| \leq |x|+|y|$$

- **Cas 3** : $x < 0$ et $y \geq 0$

$$|x+y| = |y+x| = \big|y-|x|\big| \leq |y|+|x| = |x|+|y|$$

- **Cas 4** : $x < 0$ et $y < 0$

$$|x+y| = |-x-y| = |x|+|y|$$

Ces propriétés de la valeur absolue permettent de manipuler les expressions mathématiques plus facilement et sont essentielles pour l'analyse et la résolution d'équations, comme nous le verrons après.

Utilisations

Dans cette section, nous allons montrer comment résoudre une équation simple et une inéquation impliquant des valeurs absolues.

Équation

Soit l'équation suivante : $|x-2| = 3$

Pour résoudre cette équation, considérons la définition de la valeur absolue. Une équation $|A| = B$ (où $B \geq 0$ par positivité) a deux solutions possibles :

$$A = B \text{ ou } A = -B$$

Ainsi, pour l'équation $|x-2| = 3$:

$$x-2 = 3 \text{ ou } x-2 = -3$$

<u>Résolvons chacune de ces équations séparément</u> :

1. $x-2=3$

$$x = 3+2 = 5$$

2. $x-2=-3$

$$x = -3+2 = -1$$

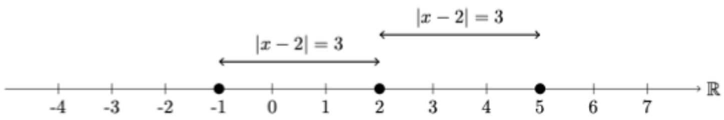
Les solutions de l'équation $|x-2|=3$ sont donc :

$$x = 5 \text{ et } x = -1$$

<u>Interprétation graphique</u> :

Graphiquement, cette équation revient à trouver les points sur la droite des réels qui sont à une distance de 3 de 2.

Figure 2 : interprétation graphique de $|x-2|=3$



Inéquations

Résolvons l'inéquation : $|x+1|>2$.

Pour la résoudre, considérons la définition de la valeur absolue. Une inéquation $|A|>B$ (où $B \geq 0$) a deux cas possibles :

$$A > B \text{ ou } A < -B$$

Appliquons cela à l'inéquation $|x+1|>2$:

$$x+1>2 \text{ ou } x+1<-2$$

<u>Résolvons chacune de ces inéquations séparément</u> :

1. $x+1>2$

$$x > 2-1 = 1$$

2. $x+1<-2$

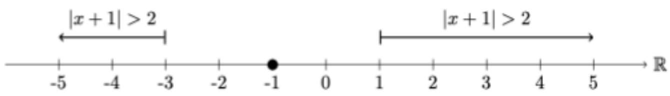
$$x < -2-1 = -3$$

Les solutions de l'inéquation $|x+1|>2$ sont donc :

$$x > 1 \text{ ou } x < -3$$

Graphiquement, cette inéquation revient à trouver les points sur la droite des réels qui sont à une distance strictement supérieure à 2 de -1.

Figure 3 : représentation graphique de l'inéquation : $|x + 1| > 2$



Dans les deux cas, pour l'équation et pour l'inéquation, on voit que la valeur absolue permet de définir des distances sur la droite numérique.

Interprétation de la valeur absolue comme distance

Interpréter la valeur absolue comme une mesure de distance peut grandement faciliter la compréhension et la résolution de problèmes, en particulier pour les équations et inéquations impliquant des valeurs absolues, comme nous l'avons vu à la section précédente. Ainsi, pour interpréter la valeur absolue comme distance, on lit l'équation $|x - a| < b$ comme la distance entre x et a doit être inférieur à b unités. C'est donc bien la valeur absolue de la différence qui s'interprète comme distance. Et en effet, $|x| = |x - 0|$ est bien la valeur absolue d'une distance, par rapport à zéro !

Examinons cela plus en détail avec les exemples suivants : $|x - 2| = 3$ et $|x - 2| < 3$.

Équation $|x - 2| = 3$

Cette équation peut être directement interprétée comme la distance entre x et 2 est exactement de 3 unités sur la droite des réels. La résolution de cette équation peut alors se faire directement, sans examen des deux cas comme à la section précédente.

Résolution :

Définir la distance $|x - 2| = 3$ implique deux scénarios, car la distance de 3 unités peut être dans la direction positive ou négative sur la ligne numérique.

Les solutions de $|x - 2| = 3$ sont $x = 5$ et $x = -1$. Ces deux points sont à une distance de 3 unités de 2 sur la ligne numérique.

Inéquation $|x - 2| < 3$

Cette inéquation peut être interprétée comme la distance entre x et 2 est strictement inférieure à 3 unités sur la ligne des réels.

Résolution :

Définir la distance $|x-2|<3$ implique que x doit se situer dans l'intervalle $[2-3,2+3]=[-1,5]$.

En effet, vérifions les deux possibilités tour à tour :

Inéquation positive

$$x-2<3 \Rightarrow x<5$$

Inéquation négative

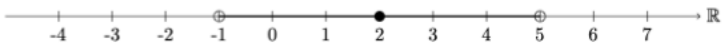
$$x-2>-3 \Rightarrow x>-1$$

Solution :

L'ensemble des solutions de $|x-2|<3$ est :

$$-1<x<5.$$

Figure 4 : représentation graphique de l'inéquation $|x-2|<3$



Conclusion

La valeur absolue est un concept mathématique fondamental qui permet de mesurer la distance d'un point à zéro sur la droite des réels. Sa définition simple mais puissante offre une interprétation géométrique claire, facilitant la résolution d'équations et d'inéquations. Les propriétés clés telles que la positivité, l'identité à zéro, la multiplicativité et la subadditivité forment la base de nombreux développements en analyse mathématique et en géométrie.

Interpréter la valeur absolue comme une mesure de distance nous aide à mieux comprendre les équations comme $|x-2|=3$ ou les inéquations comme $|x+1|>2$. Ces problèmes se résolvent efficacement en utilisant les propriétés des valeurs absolues et en visualisant leur interprétation géométrique. Ainsi, maîtriser ces notions permet non seulement de résoudre des problèmes mathématiques, mais aussi de comprendre leur signification dans un contexte plus large.

Références

Comment citer ce cours ?

Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion, Jean-François Caulier, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

Table des illustrations