Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion

Les fondamentaux – Les intervalles

Ce cours vous est proposé par Jean-François Caulier, Maître de conférences, Université Paris 1 Panthéon Sorbonne et par AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Table des matières

Préambule

Objectifs :

- Définir les différentes notions d'intervalle
- Savoir les représenter graphiquement

Introduction

Cette section porte sur la notion d'intervalle en tant qu'ensembles de nombres réels qui sont définis par deux bornes, et peuvent être ouverts, fermés, semi-ouverts, infinis ou semi-infinis. Les intervalles sont utilisés dans de nombreux domaines des mathématiques, tels que l'analyse réelle, la théorie des ensembles et les statistiques, pour décrire les domaines et les codomaines des fonctions, définir les limites et la continuité des fonctions et décrire les ensembles de données. Nous allons explorer les différents types d'intervalles, leurs propriétés et leur utilisation dans différentes opérations. En économie et gestion, les intervalles peuvent être utilisés pour représenter des intervalles de confiance statistique, des intervalles de rentabilité en finance, des intervalles de tolérance en gestion de la qualité, et peuvent aider à prendre des décisions éclairées dans ces domaines. Nous verrons également comment les intervalles peuvent être représentés graphiquement sur la droite des nombres réels.

Définitions

Avant de nous plonger dans la définition des intervalles, nous introduisons la droite des réels, représentation graphique de l'ensemble des nombres réels particulièrement utile pour visualiser des intervalles.

La droite des réels

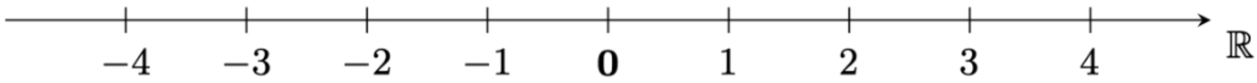
La droite des réels représente graphiquement tous les nombres réels, incluant les entiers, les fractions, les irrationnels (comme π ou $\sqrt{2}$), les négatifs et les positifs.

Principe de la droite des réels

Chaque point sur la droite correspond à un unique nombre réel et chaque réel correspond à un unique point sur la droite.

Traditionnellement, on la représente comme une ligne horizontale avec une origine notée 0 au centre. À droite de l'origine, on place les nombres positifs en augmentant vers l'infini. À gauche de l'origine, on place les nombres négatifs en diminuant vers l'infini négatif.

Figure 1 : droite des réels



Intervalle

Un intervalle est un ensemble de nombres réels compris entre deux bornes réelles ou infinies, qui peuvent être toutes les deux incluses ou exclues, ou l'une incluse et l'autre non. Les différentes possibilités donnent lieu à différents types d'intervalles. Les intervalles sont utilisés pour représenter des sous-ensembles continus de $\mathbb{R}$.

Types d'intervalles

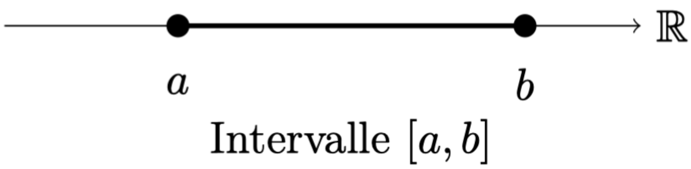
Il existe différentes possibilités d'intervalles en fonction de l'inclusion ou non des bornes.

Intervalles fermés

Un intervalle fermé est défini comme l'ensemble de tous les nombres réels compris entre deux bornes, y compris les bornes elles-mêmes. Si a et b sont les bornes, on note l'intervalle fermé $[a, b]$ et on le définit comme l'ensemble des réels $x \in [a, b]$.

Par exemple, l'intervalle [1, 5] contient tous les nombres réels compris entre 1 et 5, y compris les nombres 1 et 5 eux-mêmes.
Graphiquement, on le représente par une ligne épaisse couvrant l'espace de a à b inclusivement, avec des points pleins sur a et b.

Figure 2 : intervalle fermé



Intervalles ouverts

Un intervalle ouvert est défini comme l'ensemble de tous les nombres réels compris entre deux bornes, mais n'incluant pas les bornes elles-mêmes. Si a et b sont les bornes, on note l'intervalle ouvert $]a, b[$ et on le définit comme l'ensemble des réels $x \in]a, b[$.

Par exemple, l'intervalle]1, 5[contient tous les nombres réels compris entre 1 et 5, mais il n'inclut pas les nombres 1 et 5 eux-mêmes.

Graphiquement, on le représente par une ligne épaisse couvrant l'espace de a à b exclus, avec des points vides sur a et b.

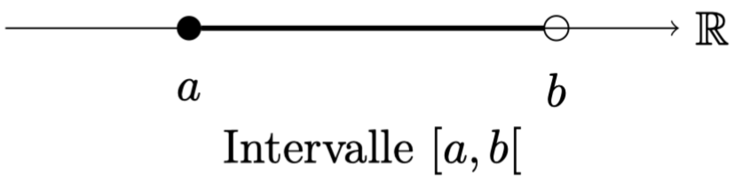
Figure 3 : intervalle ouvert

Intervalle semi-ouvert

Un intervalle semi-ouvert est défini comme l'ensemble de tous les nombres réels compris entre deux bornes, incluant une borne mais pas l'autre. Si a et b sont les bornes, on note l'intervalle semi-ouvert en utilisant toujours des crochets, tourné vers l'extérieur pour la borne exclue et tourné vers l'intérieur pour la borne incluse.

Par exemple, l'intervalle [1, 5[contient tous les nombres réels compris entre 1 et 5, y compris le nombre 1 mais pas le nombre 5.

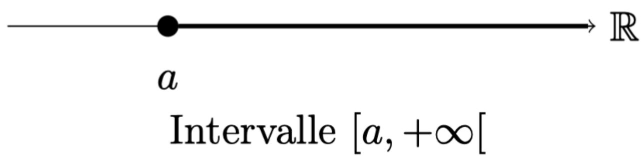
Figure 4 : intervalle semi-ouvert



Intervalles infinis

Les intervalles peuvent également être infinis ou semi-infinis. Un intervalle infini est défini comme l'ensemble de tous les nombres réels supérieurs à une certaine borne ou inférieurs à une certaine borne. Par exemple, l'intervalle $]2, +\infty[$ contient tous les nombres réels supérieurs à 2. Un intervalle semi-infini est défini comme l'ensemble de tous les nombres réels compris entre une borne finie et une borne infinie. Par exemple, l'intervalle [2, +∞[contient tous les nombres réels supérieurs ou égaux à 2.

Figure 5 : intervalles infinis



Utilisations des intervalles

De nombreux et fréquents cas d'utilisation d'intervalles se rencontrent. Nous en développons ici trois particulièrement fréquemment rencontrés.

Solutions d'inéquations

Les intervalles sont souvent utilisés pour exprimer les solutions d'inéquations.

Exemple

L'inéquation $x^2 - 4x + 3 < 0$ a pour solutions $x \in]1,3[$. En effet, par factorisation on trouve $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) = 0$, les racines sont donc $x = 1$ et $x = 3$.

On dresse alors le tableau du signe :

Intervalle	$x^2 - 4x + 3$
$x < 1$	$(+)$
$1 < x < 3$	$(-)$
$x > 3$	$(+)$

Figure 6 : tableau du signe

Par conséquent, la solution de l'inéquation est : $x^2 - 4x + 3 < 0 \Rightarrow x \in]1,3[$.

Domaine de définition

Les intervalles sont utilisés pour spécifier où une fonction est définie ou prend certaines valeurs.

Exemple :

Le domaine de définition de $f(x) = ln(x)$ est $x \in]0, +\infty[$.

Calcul intégral

Les bornes d'intégration sont souvent exprimées en termes d'intervalles.

Exemple

Pour calculer l'intégrale définie d'une fonction $g(x)$ sur un intervalle $[a, b]$, on utilise la notation suivante :

$$\int_a^b g(x)\ dx$$

Supposons que nous ayons à calculer l'intégrale définie de $g(x) = x^2$ sur l'intervalle $[1,3]$. La notation devient :

$$\int_1^3 x^2\ dx$$

Pour résoudre cette intégrale :

$$\int x^2\ dx = \frac{x^3}{3} + C$$

Évaluons cette primitive entre 1 et 3 :

$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

Donc, l'intégrale définie de x^2 sur $[1,3]$ est :

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}.$$

Opérations sur les intervalles

Les intervalles sont des sous-ensembles de la droite réelle $\mathbb{R}$. Il est possible d'effectuer diverses opérations sur ces intervalles, tout comme sur n'importe quel autre ensemble. Voici un développement détaillé de ces opérations :

Réunion et intersection

La **réunion** de deux intervalles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'un ou l'autre de ces intervalles (ou aux deux) : $A \cup B = \{x \,|x \in A \ ou \ x \in B\}$.

Exemple 1 :

Si $A = [1,3]$ et $B = [2,4]$, alors la réunion est : $A \cup B = [1,4]$.

Exemple 2 :

Si $A = [1,2]$ et $B = [3,4]$, alors la réunion est : $A \cup B = [1,2] \cup [3,4]$.

L'**intersection** de deux intervalles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent simultanément aux deux intervalles : $A \cap B = \{x \,|x \in A \, et \ x \in B\}$.

Exemple 1 :

Si $A = [1,3]$ et $B = [2,4]$, alors l'intersection est : $A \cap B = [2,3]$.

Exemple 2 :

Si $A = [1,2]$ et $B = [3,4]$, alors l'intersection est : $A \cap B = \emptyset$.

Complément et différence

Le **complément** d'un intervalle A par rapport à l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels qui ne sont pas dans A : $\bar{A} = \{x \,|x \notin A\}$.

Exemple :

Si $A = [1,3]$, alors le complément est :

$$\bar{A} =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$$

La **différence** entre deux intervalles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A mais pas dans B : $A \setminus B = \{x \mid x \in A\ x \notin B\}$.

Exemple 1 :

Si $A = [1,3]$ et $B = [2,4]$, alors la différence est : $A \setminus B = [1,2[$

Exemple 2 :

Si $A = [1,2]$ et $B = [2,3]$, alors la différence est : $A \setminus B = [1,2[$.

Exemple 3 :

Si $A = [1,3]$ et $B = [0,2]$, alors la différence est : $A \setminus B =]2,3]$.

Conclusion

Les intervalles sont une notion fondamentale en mathématiques, car ils permettent de manipuler facilement des sous-ensembles continus de $\mathbb{R}$. Leur compréhension est essentielle pour résoudre les inéquations, définir les domaines de fonctions et effectuer un calcul intégral.

Les opérations sur les intervalles, telles que la réunion, l'intersection, le complément et la différence, sont des outils puissants pour traiter des problèmes variés. En maîtrisant ces concepts, on développe une compréhension plus profonde des fonctions, des équations, et des notions d'analyse en général.

Références

Comment citer ce cours ?

Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion, Jean-François Caulier, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

Table des illustrations